

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO EN MATEMÁTICAS

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Xeometría Linear

ÓSCAR RIVERO SALGADO

*con contribucións de Clara Senín Sánchez e
Manuel Vilar Fernández*



Santiago de Compostela, Agosto 2024

Índice xeral

Introdución	5
Conceptos básicos de grupos e corpos	9
Definicións	9
Exemplos	9
Accións	10
Homomorfismos e produtos	11
1. O espazo afín e o espazo proxectivo	13
1.1. O espazo afín e o espazo proxectivo: definicións	14
1.2. Variedades lineais afíns e proxectivas	17
1.3. Referencias afíns e proxectivas	23
1.4. Completación proxectiva de espazos afíns	29
1.5. Ecuacións das variedades lineais	33
1.6. A razón simple e a razón dobre	36
1.7. Algúns teoremas da xeometría plana clásica	41
1.8. Planos afíns e proxectivos axiomáticos	46
1.9. Problemas	54
2. Afinidades e proxectividades	73
2.1. Afinidades: definición e propiedades	73
2.2. Proxectividades: definición e propiedades	80
2.3. Matrices de afinidades e proxectividades	87
2.4. Puntos fixos e variedades invariantes	92
2.5. Algunhas familias de afinidades	95
2.6. Clasificación de afinidades en dimensión 1 e 2	101
2.7. Clasificación de proxectividades en dimensión 1 e 2	107
2.8. Perspectividades e homoloxías proxectivas	109
2.9. Dualidade proxectiva	117
2.10. Demostración dos teoremas fundamentais da xeometría afín e da xeometría proxectiva	121
2.11. Problemas	122
3. Xeometría afín e euclidiana	155
3.1. Preliminares: espazos vectoriais euclidianos	155
3.2. Propiedades métricas	160
3.3. Isometrías e movementos	163
3.4. Clasificación de movementos no plano	165
3.5. Clasificación de movementos no espazo	168

3.6. Xeometría clásica	174
3.7. Problemas	186
4. Cónicas e cuádricas	207
4.1. Anatomía do círculo	207
4.2. Definicións e representación matricial	208
4.3. Clasificación métrica e afín das cónicas e das cuádricas	210
4.4. Clasificación proxectiva das cónicas e das cuádricas	221
4.5. Estudo particular das cónicas non dexeneradas	225
4.6. Conxugación e polaridade	232
4.7. O teorema de Steiner	234
4.8. Cónicas e razón dobre	235
4.9. Da xeometría afín e proxectiva á xeometría alxébrica	239
4.10. Problemas	244

Introdución

Este libro está pensado para un curso de Xeometría Linear, no que o obxectivo central é o estudo da Xeometría Afín. Porén, optamos por o énfase na xeometría proxectiva, e entender o espazo afín como o resultado de eliminar un hiperplano do espazo proxectivo. Deste xeito, o noso acercamento pasa por introducir o espazo afín e o espazo proxectivo de xeito simultáneo, entendéndoos como conceptos intimamente ligados. A continuación, preséntanse as afinidades e as proxectividades, traballando as súas propiedades máis relevantes e centrándonos no problema de achar os puntos fixos e máis en xeral as variedades invariantes.

O acercamento que frecuentemente se realiza pasaba por definir primeiro o espazo afín e estudar a continuación diferentes obxectos: variedades lineais, sistemas de referencia ou afinidades, entre outros. Este enfoque obvia, de entrada calquera mención á xeometría proxectiva, mentres que aquí optouse por ir tratando ambos temas simultaneamente, o que facilita a interpretación de moitos conceptos.

Na segunda parte do curso, ponse o foco na xeometría euclidiana, introducindo a noción de *movemento* e realizando a súa clasificación no plano e no espazo. Ao igual que sucedía nos temas iniciais, centrámonos na conexión coa xeometría clásica.

Finalmente, a última parte céntrase no estudo das cónicas e das cuádricas, adoptando de novo o mesmo punto de vista de interpretar a xeometría afín como unha subxeometría da xeometría proxectiva. Isto serve, á súa vez, para motivar o estudo da xeometría alxébrica clásica, que constituiría a continuación natural deste curso.

Contidos. O libro contén 4 capítulos, cada un deles correspondentes a un dos temas da materia. Ademais, incluímos un primeiro capítulo no que repasamos conceptos básicos de grupos e corpos que se empregan ao longo da materia.

- **Capítulo 1. O espazo afín e o espazo proxectivo.** Introdúcense desde diferentes perspectivas as estruturas que se empregarán ao longo do texto, que son os espazos afíns e proxectivos, facendo énfase na conexión entre eles. Defínese a noción de subvariedade en ambos casos e tamén se explica como traballar con coordenadas e con ecuacións. Na parte final, introdúcense os conceptos de razón simple e razón dobre, e realízanse algunhas aplicacións á xeometría clásica.
- **Capítulo 2. Afinidades e proxectividades.** Introdúcense as aplicacións entre espazos afíns e espazos proxectivos, demostrando algunhas propiedades. A continuación, realízase a clasificación en dimensión 1 e 2, e trabállanse diferentes casos en dimensión 3. Tamén se estudan algunhas familias de afinidades e proxectividades que desempeñan un papel destacado. Finalmente, preséntase o principio de dualidade proxectiva.
- **Capítulo 3. Movementos.** Nesta parte, introdúcese unha estrutura extra nos espazos afíns, que vén dada por un produto escalar. Isto permite falar de conceptos

como distancia ou ángulo, que ata o de agora non estaban dispoñibles. Introdúcese o concepto de movemento, que non é máis que unha afinidade que preserva as distancias, e realízase a súa clasificación en dimensión 1, 2 e 3, estudando con detalle cada caso.

- **Capítulo 4. Cónicas e cuádricas afíns e proxectivas.** Nesta parte trabállanse as propiedades básicas das cónicas e das cuádricas, así como a súa clasificación en dimensión 1, 2 e 3. Tamén se estudan outros aspectos no caso proxectivo, como as nocións de conxugación, polaridade ou inversión.

Tódolos capítulos se estruturan do mesmo xeito. Primeiro inclúense as diferentes seccións teóricas, nas que se presentan os resultados principais, e logo na última sección discútense diferentes problemas, todos eles resoltos, co obxectivo de favorecer o estudo autónomo por parte do lector. Algúns dos temas que se discuten son máis avanzados e pódense entender como complementos ou materiais de ampliación para un primeiro curso de xeometría; por exemplo, iso sucede coa presentacións das xeometrías finitas ou das variedades proxectivas e da grassmaniana. Outros temas, como a demostración do teorema fundamental da xeometría afín ou a introdución á xeometría clásica, tamén son prescindibles e non afectan ao resto do volume.

Libros e textos de referencias. Os manuais de Raventós, tanto de xeometría afín [R08] como de xeometría proxectiva [R01], teñen unha gran influencia. Nalgúns casos de xeito directo, e noutro a través dos apuntamentos dos cursos de Xeometría Afín [Pa13] e Euclidiana e Álgebra Multilinear e Xeometría [Pl14] que cursei na Universitat Politècnica de Catalunya nos cursos 2012-2013 e 2013-2014 cos profesores Pere Pascual e Francesc Planas, respectivamente.

A idea de explicar simultaneamente os conceptos da xeometría afín e da xeometría proxectiva, en vez de presentalos como realidades diferentes, está inspirada polo manual de Fernando Galván e Gamboa [FG17], do que tamén tomei varias ideas. A lectura doutros libros de referencia tamén me axudou a estruturar mellor algunhas partes; gustaríame mencionar, nese sentido, os libros de Gruenberg e Weir [GW77] e de Ritcher-Gebert [RG11], onde ofrece unha visión diferente de varios temas de xeometría proxectiva. Varios libros de álgebra lineal inclúen partes extensas dedicadas ao estudo da xeometría, que para certos temas, como o estudo das cónicas e das cuádricas, son tamén de gran relevancia; nese sentido, servímonos en varias ocasións dos libros de Castellet e Llerena [CL00] e Hernández [H98].

A última sección do primeiro capítulo, na que se estudan os planos axiomáticos (afín e proxectivo), segue principalmente o libro de Ball e Serra [BS24], que dedica o primeiro capítulo ás xeometrías finitas. Finalmente, moitas aplicacións á xeometría clásica tomeinas da miña experiencia na Olimpíada Matemática.

Agradecementos. Este libro foise escribindo durante o primeiro cuadrimestre do curso 2023-2024, mentres impartía a materia *Xeometría Linear*, correspondente ao segundo curso do Grao en Matemáticas. A algúns compañeiros de departamento, que impartiron nalgún momento esa materia, agradézolles algunhas discusións útiles sobre como tratar determinados temas; en particular, quero mencionar a Cristina Costoya, a Alejandro F. Fariña e a Brais Ramos.

Dous dos alumnos do curso contribuíron de forma esencial a este manual. A maioría dos debuxos foron realizados por Manuel Vilar, cuxa contribución foi esencial para o

progreso deste texto, por sinalar tamén numerosos erros nas primeiras versións. A parte correspondente ás xeometrías finitas (Capítulo 1), á xeometría clásica (Capítulo 3) e á grassmaniana (Capítulo 4) foi inicialmente proposta como parte de exercicios extensos que se realizaron durante a materia; o texto que se presenta segue bastante fielmente os desenvolvementos realizados por Clara Senín (incluídos os debuxos e gráficos desta parte), que destacaban pola súa claridade e didactismo; de feito, recibiu por este traballo o Premio á Calidade Lingüística que entrega anualmente a USC. Ao resto do alumnado do curso agradézo-lles os comentarios e as suxestións de mellora.

Conceptos básicos de grupos e corpos

Definicións

Definición 0.0.1. Un *grupo* é un conxunto onde hai definida unha operación asociativa, con elemento neutro, e tal que todo elemento ten inverso. O grupo dise que é *abeliano* ou *conmutativo* se a operación é conmutativa.

Un *subgrupo* H dun grupo G é un subconxunto que, coa operación de G , é un grupo (é dicir, a operación é pechada, contén o elemento neutro e os inversos de cada elemento).

Dado un subgrupo H dun grupo G , podemos considerar o conxunto das súas *clases laterais*, que é un concepto análogo ao dos cocientes no caso dos espazos vectoriais.

Definición 0.0.2. Sexa H un subgrupo dun grupo G . Os subconxuntos da forma aH , onde $aH = \{ah \mid h \in H\}$, chámase *clases laterais pola esquerda de H en G* . O conxunto de clases pola esquerda escríbese como G/H .

Os subconxuntos da forma Hb , onde $Hb = \{hb \mid h \in H\}$, chámase *clases laterais pola dereita de H en G* . Cando as clases laterais pola esquerda coinciden coas clases laterais pola dereita, dise que H é *normal*.

Nese caso, o conxunto G/H ten estrutura de grupo coa operación dada por

$$aH \cdot bH = (ab) \cdot H.$$

Chámase *grupo cociente* e escríbese G/H .

Nun grupo, o *centro* é o conxunto de elementos que conmutan con tódolos demais. O centro dun grupo sempre é un subgrupo normal.

Exemplos

Os principais exemplos de grupos cos que imos traballar son os seguintes:

1. Calquera anel A é un grupo ao considerarmos a operación suma.
2. Os elementos invertibles dun anel A forman un grupo co produto. En particular, se $n \geq 1$ é un enteiro, o conxunto de restos módulo n , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, é un grupo coa suma; e $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, o conxunto de restos módulo n relativamente primos con n , é un grupo co produto.
3. As matrices con coeficientes nun corpo K e determinante non nulo, $GL_n(K)$, forman un grupo co produto.

4. Se $n \geq 1$, o conxunto de permutacións de $\{1, 2, \dots, n\}$ é un grupo finito de $n!$ elementos coa operación dada pola composición de permutacións.

Cando $n \geq 3$, o centro de S_n é trivial (só hai un elemento). Para $GL_n(K)$, o centro está formado polas matrices diagonais co mesmo elemento non nulo ao longo de toda a diagonal. O cociente de $GL_n(K)$ polo seu centro chámase $PGL_n(K)$. Podemos entender os seus elementos como clases $[g]$, onde $g \in GL_n(K)$ e $[g_1] = [g_2]$ se, e soamente se, $g_1 g_2^{-1}$ é un múltiplo da identidade. O produto de $[g_1]$ e $[g_2]$ é simplemente $[g_1 g_2]$, e o inverso de $[g_1]$ é $[g_1^{-1}]$. Os elementos de $PGL_2(K)$ poden identificarse con transformacións

$$K \cup \{\infty\} \longrightarrow K \cup \{\infty\} \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

No caso do grupo simétrico, as permutacións pares forman un subgrupo normal, o chamado *grupo alternado* (o produto de permutacións pares sempre é par). O cociente é un grupo de dous elementos.

Accións

Na seguinte sección, empregamos a notación multiplicativa, denotando cun punto a operación no grupo e con 1 o elemento neutro.

Definición 0.0.3. Sexa G un grupo e X un conxunto. Unha acción de G en X é unha aplicación $G \times X \longrightarrow X$, que escribiremos $g \cdot x$, que cumpre as seguintes condicións.

- (a) $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$ para todo $g, h \in G$ e $x \in X$.
- (b) $1 \cdot x = x$ para todo x .

Por exemplo, unha acción que traballamos extensamente é a do grupo simétrico en $T_p(E)$, o espazo vectorial das aplicacións p -multilineais dun K -espazo vectorial E . Nese caso, $\sigma \cdot f$ é o tensor tal que

$$\sigma \cdot f(v_1, \dots, v_p) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}).$$

Isto define unha acción do grupo simétrico S_p no espazo $T_p(E)$, que ademais respecta a suma e o produto por escalares, é dicir,

$$\sigma \cdot (\lambda f + \mu g) = \lambda \sigma \cdot f + \mu \sigma \cdot g,$$

onde $f, g \in T_p(E)$ e $\lambda, \mu \in K$. Adoita falarse dunha acción dun grupo nun espazo vectorial cando se cumpre esta propiedade, é dicir, cando se respecta a estrutura de espazo vectorial.

Ao longo da materia de Álgebra Linear e Multilinear atopamos outras accións dun grupo nun conxunto.

- O grupo $GL_n(K)$ de matrices invertibles actúa *por conjugación* no conxunto das matrices $\mathcal{M}_n(K)$, é dicir, se $P \in GL_n(K)$ e $A \in \mathcal{M}_n(K)$, definimos $P \cdot A := PAP^{-1}$.
- O grupo de matrices ortogonais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ actúa no conxunto de vectores de norma fixada; por exemplo, se v ten norma 1 e $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, entón definimos $M \cdot v = Mv$, xa que $\|Mv\| = \|v\| = 1$. Dicimos entón que as isometrías actúan nos espazos euclidianos, xa que preservan tanto a estrutura de espazo vectorial como a norma.

As accións son interesantes para entender o comportamento e a estrutura dos grupos. Un concepto útil é o de *órbita*: dicimos que dous elementos $x, y \in X$ están na mesma órbita se existe $g \in G$ de maneira que $g \cdot x = y$.

Definición 0.0.4. Unha acción dise que é *transitiva* se para todo par $x, y \in X$, existe $g \in G$ de maneira que $g \cdot x = y$. Dise que é *libre* se $g \cdot x = x$ para algún x implica que g é o neutro do grupo. Finalmente, dise que é *fiel* se $g \cdot x = x$ para todo x implica que g é o neutro do grupo.

Homomorfismos e produtos

Definición 0.0.5. Sexan G_1 e G_2 dous grupos. Un homomorfismo de grupos é unha aplicación $f: G_1 \rightarrow G_2$ de xeito que $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in G_1$.

O conxunto de homomorfismos de grupos bixectivos $f: G_1 \rightarrow G_1$ son os *automorfismos* de G_1 . Teñen estrutura de grupo coa composición.

A modo de exemplo, sexa $n \geq 1$ un enteiro. Un homomorfismo $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ queda determinado por $f(1)$, que pode tomar n valores diferentes; é un automorfismo se, e soamente se, $\gcd(n, f(1)) = 1$. Polo tanto, hai $\varphi(n)$ automorfismos, e o grupo de automorfismos é isomorfo ao grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Definición 0.0.6. Sexan G_1 e G_2 dous grupos. O produto $G_1 \times G_2$ coa operación da multiplicación compoñente a compoñente chámase *produto directo* de G_1 e G_2 .

Neste curso introduciremos outro produto diferente de dous grupos, o chamado *produto semidirecto*.

Capítulo 1

O espazo afín e o espazo proxectivo

A álgebra lineal céntrase no estudo dos espazos vectoriais e das aplicacións entre eles que respectan a estrutura de suma e produto por escalares. Un aspecto importante dos espazos vectoriais é que teñen un punto *privilexiado*, que é o 0. De cara a facer xeometría, imos introducir a noción de espazo afín, no que tódolos puntos son iguais. O espazo proxectivo é outra estrutura que captura boas propiedades alxébricas para o desenvolvemento da xeometría. A seguinte táboa resume as diferentes estruturas coas que imos traballar, e as analoxías que convén ter en mente á hora de considerar os diferentes obxectos.

Espazo vectorial	Espazo afín	Espazo proxectivo
Subespazo vectorial	Var. lineal afín	Var. lineal proxectiva
Aplicacións lineais	Afinidades	Proxectividades
Isometrías	Movementos	
Forma cuadrática	Cónica/cuádrlica afín	Cónica/cuádrlica prox.

Deste xeito, é natural comezar definindo os análogos dos espazos vectoriais sobre os cales facer xeometría, é dicir, os espazos afíns e os espazos proxectivos. Estes, á súa vez, dan lugar a subestruturas e a aplicacións entre eles. Igual que nos espazos vectoriais un pode introducir unha norma e traballar coas aplicacións que a preservan (as isometrías), nos espazos afíns faremos o mesmo, e falaremos entón de *movementos*. A xeometría euclidiana é aquela que estuda, polo tanto, as aplicacións que conservan as distancias. O seguinte cadro ilustra os tres tipos de xeometría cos que imos traballar e algúns aspectos importantes de cada unha.

Xeometría euclidiana	Xeometría afín	Xeometría proxectiva
Movementos	Afinidade	Proxectividade
$\mathcal{O}_n(K) + \text{translacións}$	$\text{GL}_n(K) + \text{translacións}$	$\text{PGL}_{n+1}(K)$
Produto escalar	Razón simple	Razón dobre

A segunda liña denota as transformacións que estudaremos en cada contexto. A terceira liña fai referencia ao grupo de matrices que describe as transformacións xeométricas. Tanto no caso euclidiano como no afín haberá que considerar un produto axeitado do grupo de matrices e das translacións; será o que denominaremos *produto semidirecto*: as transformacións afíns bixectivas corresponderanse con matrices da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in \text{GL}_{n+1}(K),$$

onde $A \in \text{GL}_n(K)$ é a parte lineal e $b \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$. A xeometría euclidiana pódese entender de xeito natural dentro da xeometría afín, xa que $\mathcal{O}_n(K)$ é un subgrupo de $\text{GL}_n(K)$.

A última liña, por outra parte, fai referencia aos invariantes xeométricos: os movementos conservan produtos escalares e distancias (e polo tanto ángulos, áreas e volumes); en cambio, as afinidades unicamente teñen que preservar os cocientes entre distancias, é dicir, se A, B e C son tres puntos aliñados, preservan o valor de $\frac{|AC|}{|AB|}$. Finalmente, as proxectividades conservan o cociente de cocientes, que é o que xeralmente se denomina razón dobre; se A, B, C, D son catro puntos aliñados, a razón dobre é o valor $\frac{BD/BC}{AD/AC}$. Por exemplo, os movementos inclúen as translacións e as rotacións, pero non as *homotecias* do xeito $x \mapsto 2x$. As homotecias son un exemplo de afinidade, como calquera transformación da forma $ax + b$; en cambio, transformacións como a *inversión* $x \mapsto x^{-1}$ non son afinidades, pero si proxectividades.

Ao longo de todo o tema, sexa K un corpo e E un K -espazo vectorial. A modo de notación, empregaremos a letra gorda para referirnos ao vector que une dous puntos (o que frecuentemente se denota cunha frecha).

1.1. O espazo afín e o espazo proxectivo: definicións

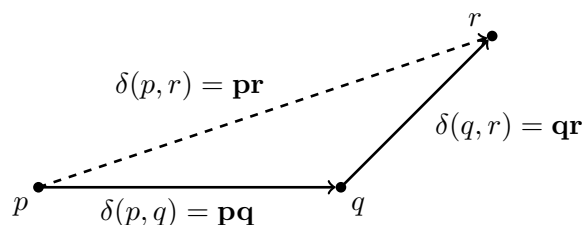
O espazo afín

Definición 1.1.1. Un *espazo afín* é unha terna (\mathbb{A}, E, δ) , onde \mathbb{A} é un conxunto, E é un espazo vectorial e δ é unha aplicación

$$\delta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow E, \quad (p, q) \mapsto \mathbf{pq}$$

que cumpre as seguintes propiedades:

- (a) Aditividade: $\mathbf{pq} + \mathbf{qr} = \mathbf{pr}$, para calquera $p, q, r \in \mathbb{A}$.



- (b) Homoxeneidade: para calquera $p \in \mathbb{A}$, a aplicación

$$\delta_p : \mathbb{A} \longrightarrow E \quad q \mapsto \mathbf{pq}$$

é bixectiva.

A aplicación δ dise tamén que é unha *estrutura de espazo afín* en \mathbb{A} asociada a E . Os elementos de \mathbb{A} chámanse *puntos* de \mathbb{A} . Dados dous puntos p, q , diremos que p é a *orixe* do vector \mathbf{pq} e que q é o *extremo*. Se E ten dimensión n , diremos tamén que a *dimensión* de \mathbb{A} é n .

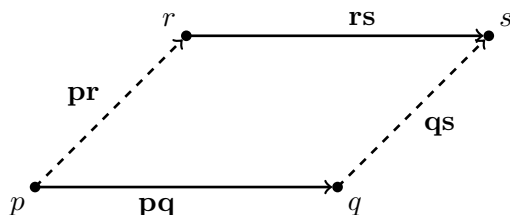
A propiedade (a) aparece ás veces co nome de *relación de Chasles*.

Exemplo. Un K -espazo vectorial E ten unha estrutura natural de espazo afín definindo $\delta(u, v) = v - u$. Escribiremos \mathbb{A}_K^n para referirnos ao espazo afín asociado ao espazo vectorial K^n ; se o corpo K está claro polo contexto, ás veces poremos simplemente \mathbb{A}^n .

A seguinte proposición resume algunhas das propiedades que cumpren os espazos afíns.

Proposición 1.1.1. Sexa \mathbb{A} un espazo afín e sexan $p, q, r, s \in \mathbb{A}$ puntos calquera. Entón, cúmprense as seguintes propiedades.

- (a) $\mathbf{pq} = 0$ se, e soamente se, $p = q$.
- (b) $\mathbf{pq} = -\mathbf{qp}$.
- (c) $\mathbf{pq} = \mathbf{rs}$ se, e soamente se, $\mathbf{pr} = \mathbf{qs}$.



Demostración. (a) Supoñamos primeiro que $p = q$. Entón, pola primeira propiedade, $\mathbf{pp} + \mathbf{pp} = \mathbf{pp}$, de onde se segue que $\mathbf{pp} = 0$. O recíproco é consecuencia da bixectividade de δ_p , xa que só pode haber un punto $q \in \mathbb{A}$ tal que $\delta(p, q) = 0$.

(b) Hai que demostrar que $\mathbf{pq} + \mathbf{qp} = 0$. Empregando a aditividade, $\mathbf{pq} + \mathbf{qp} = \mathbf{pp}$, que é 0 polo apartado anterior.

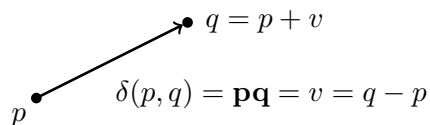
(c) Supoñamos que $\mathbf{pq} = \mathbf{rs}$. Tense entón que

$$\mathbf{pr} = \mathbf{pq} + \mathbf{qr} = \mathbf{qr} + \mathbf{rs} = \mathbf{qs},$$

como queriamos ver. □

A propiedade (c) adoita chamarse *identidade do paralelogramo*.

Se $p, q \in \mathbb{A}$ e pomos $v = \mathbf{pq} \in E$ entón pomos $q = p + v$ e $v = q - p$.



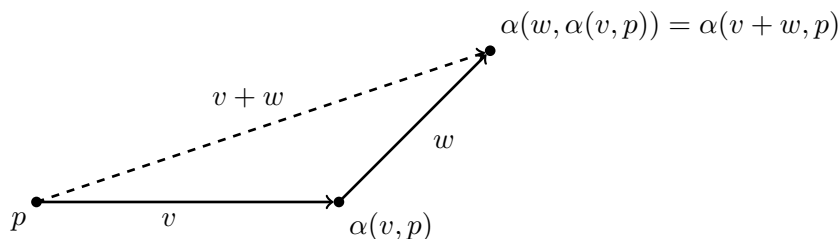
Alternativamente, pódese definir un espazo afín como un conxunto \mathbb{A} cunha acción dun espazo vectorial que sexa *simplemente transitiva*, isto é, que sexa *transitiva e libre*. Unha acción $G \times X \rightarrow X$ é transitiva se para todo par $x, y \in X$, existe $g \in G$ de maneira que $g \cdot x = y$; e é libre se $g \cdot x = x$ para algún x implica que g é o neutro do grupo. Neste caso, que a acción sexa simplemente transitiva quere dicir que existe unha aplicación

$$\alpha: E \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$

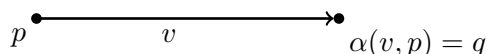
que cumpre as seguintes tres propiedades (as dúas primeiras son a definición de acción e a terceira correspóndese co feito de que a acción é simplemente transitiva):

- (a') $\alpha(0, p) = p$ para todo $p \in \mathbb{A}$.

(b') $\alpha(w, \alpha(v, p)) = \alpha(v + w, p)$ para todo $p \in \mathbb{A}$ e todo $v, w \in E$.



(c') Para calquera $p, q \in \mathbb{A}$ existe un único $v \in E$ de maneira que $q = \alpha(v, p)$.



Podemos entender α como unha aplicación que permite mover a orixe, e que responde á idea de que *tódolos puntos desempeñan o mesmo papel*.

Proposición 1.1.2. Un conxunto \mathbb{A} ten unha estrutura de espazo afín asociada ao espazo vectorial E se, e soamente se, existe unha acción simplemente transitiva (é dicir, que cumpre (a'), (b') e (c')).

Demostración. Supoñamos que \mathbb{A} ten estrutura de espazo afín. Entón, definimos $\alpha(v, p)$ como o único elemento $q \in \mathbb{A}$ tal que $\delta(p, q) = v$, polo que α está ben definida. Imos ver que se cumpren as tres propiedades que se existen para que a acción sexa simplemente transitiva. A primeira é consecuencia do feito que $\delta(p, q) = 0$ se, e soamente se, $p = q$. A segunda séguese da aditividade de δ . En efecto, podemos pór $\alpha(v, p) = q$ e $\alpha(w, q) = r$. Entón, sabemos que $v + w = \mathbf{pq} + \mathbf{qr} = \mathbf{pr}$, polo que $\alpha(v + w, p) = r$. Por último, a terceira propiedade é consecuencia directa da homoxeneidade de δ .

Para demostrar o recíproco definimos $\delta(p, q)$ como o único $v \in E$ de maneira que $q = \alpha(v, p)$. A aditividade de δ é consecuencia do feito que α sexa unha acción. Máis en concreto, pomos $\delta(p, q) = v$ con $q = \alpha(v, p)$; e $\delta(q, r) = w$, con $r = \alpha(w, q)$. Entón

$$r = \alpha(w, q) = \alpha(w, \alpha(v, p)) = \alpha(v + w, p),$$

polo que $\delta(p, r) = v + w$. De aquí conclúese que

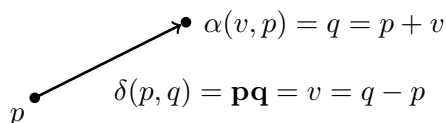
$$\delta(p, q) + \delta(q, r) = v + w = \delta(p, r).$$

Para ver a homoxeneidade, hai que demostrar que, para un p arbitrario, δ_p é inxectiva e sobrexectiva. Para a inxectividade, supoñamos que hai dous puntos diferentes $q_1, q_2 \in \mathbb{A}$ de maneira que $\delta(p, q_1) = \delta(p, q_2)$. Entón,

$$q_1 = \alpha(\delta(p, q_1), p) = \alpha(\delta(p, q_2), p) = q_2,$$

que é unha contradición. Para a sobrexectividade, fixado $v \in E$, hai que atopar $q \in \mathbb{A}$ de maneira que $\delta(p, q) = v$. Collendo $q = \alpha(v, p)$, tense que $\delta(p, \alpha(v, p)) = v$. \square

Se $\delta(p, q) = v$, pomos $\mathbf{pq} = v$; como nese caso $\alpha(v, p) = q$, escribimos tamén $q = p + v$ e, de xeito consistente, $v = q - p$.



O espazo proxectivo

A outra estrutura natural para desenvolver os resultados de xeometría que imos traballar é o espazo proxectivo. Do mesmo modo que nos espazos afíns tódolos puntos desempeñan o mesmo papel, ese comportamento simétrico non é certo para pares de rectas. Por exemplo, nun plano afín hai rectas paralelas e outras que se cortan. A definición do espazo proxectivo permite superar algunhas das dificultades inherentes aos espazos afíns. Tamén será o espazo natural para desenvolver certos resultados da xeometría alxébrica; por exemplo, se consideramos curvas definidas por polinomios de graos m e n , esperamos que se corten en mn puntos. No caso particular de $m = n = 1$, isto equivale a dicir que calquera parella de rectas se corta nun punto. Para iso, é preciso considerar os *puntos no infinito*.

Definición 1.1.2. Un *espazo proxectivo* é unha terna (\mathbb{P}, E, π) , onde \mathbb{P} é un conxunto, E é un espazo vectorial e $\pi: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}$ é unha aplicación sobrexectiva que cumpre que $\pi(x) = \pi(y)$ se, e soamente se, $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in K$. Os elementos de \mathbb{P} chámanse *puntos* e se $p = \pi(x)$, dise que x é un *representante* de p . O elemento $p = \pi(x)$ tamén se escribe como $[x]$. Dise que a *dimensión* de \mathbb{P} é $\dim E - 1$.

Cando E é un espazo vectorial, definimos $\mathbb{P}(E)$ como o conxunto formado por tódolos subespazos vectoriais de E de dimensión 1. Se $\rho: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ é a aplicación definida por $\rho(x) = \langle x \rangle$, tense que $(\mathbb{P}(E), E, \rho)$ é un espazo proxectivo; é o que denominada o *proxectivizado* de E .

Definición 1.1.3. Sexa $E = K^{n+1}$ e $\mathbb{P}_K^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ o proxectivizado de K^{n+1} . Chámase *espazo proxectivo estándar* de dimensión n ou, simplemente, *espazo proxectivo*. Se o corpo K está claro polo contexto, podemos escribir \mathbb{P}^n .

Imos comezar explorando o caso de \mathbb{P}_K^2 . Os vectores non nulos de K^3 pódense dividir en tres grupos disxuntos: os que teñen a última compoñente diferente de 0; os que teñen a última compoñente igual a 0, pero a segunda diferente de cero; e os que teñen as dúas últimas compoñentes iguais a 0. Multiplicando polo inverso da última compoñente non nula, temos que tódolos vectores son múltiplos de un e só de un do conxunto

$$\{(a, b, 1) \mid a, b \in K\} \cup \{(a, 1, 0) \mid a \in K\} \cup \{(1, 0, 0)\}.$$

Por exemplo, se K é un corpo finito de q elementos, $|\mathbb{P}_K^2| = q^2 + q + 1$. Máis adiante estenderemos esta idea ao caso xeral de \mathbb{P}_K^n .

Outra interpretación que resulta útil é a seguinte. Ao traballar no espazo afín \mathbb{A}_K^2 , temos que distinguir entre puntos e vectores. Calquera vector sempre será un múltiplo dun da forma (a, b) , con a e b non nulos. Polo tanto, se pensamos en ternas da forma $[a : b : c]$, onde dúas son iguais cando coinciden ao multiplicalas por un escalar, temos que os puntos de \mathbb{A}_K^2 pódense pensar como os elementos da forma $[a : b : 1]$, con $a, b \in K$; e as diferentes direccións son os elementos da forma $[a : b : 0]$, entendendo que os vectores (a, b) e (a', b') representan a mesma dirección se existe $\lambda \neq 0$ de xeito que $(a', b') = \lambda(a, b)$.

1.2. Variedades lineais afíns e proxectivas

Salvo que se indique o contrario, a partir desta sección imos supor sempre que estamos en dimensión finita, aínda que algúns dos resultados funcionan nun contexto máis xeral.

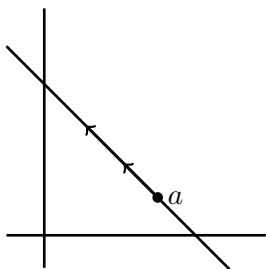
Definicións

Do mesmo xeito que ao estudarmos os espazos vectoriais estabamos interesados nos seus subespazos, no caso dos espazos afíns e proxectivos sucede o mesmo e podemos introducir o concepto de subespazo afín ou subespazo proxectivo; polo xeral, falaremos de *variedades lineais afíns* e *variedades lineais proxectivas*. Imos comezar co caso dun espazo afín (\mathbb{A}, E, δ) .

Definición 1.2.1. Dado un punto $a \in \mathbb{A}$ e un subespazo $F \subset E$, defínese a *variedade lineal afín* de \mathbb{A} que pasa por a e que ten subespazo director F como o subconxunto

$$V = a + F = \{p \in \mathbb{A} : p = a + u, u \in F\}.$$

A *dimensión* de V é a dimensión do subespazo vectorial director F .



As variedades lineais de dimensión 0 son os puntos. Ás variedades lineais de dimensión 1 chámaselles *rectas* e ás de dimensión 2, *planos*. Se $\dim \mathbb{A} = n$, as variedades lineais de dimensión $n - 1$ chámanse *hiperplanos*.

Proposición 1.2.1. Sexan $V = a + F$ e $W = b + G$ dúas variedades lineais afíns.

- (a) Tense que $V = a' + F$ se, e soamente se, $\mathbf{aa}' = a' - a \in F$ (ou, alternativamente, se $a' \in V$).
- (b) $V = a + F \subset W = b + G$ se, e soamente se, $a \in W$ e $F \subset G$.
- (c) Se $V \subset W$, entón $\dim V \leq \dim W$ e $\dim V = \dim W$ se, e soamente se, $V = W$.

Demostración. (a) Tense que $a + F = a' + F$ se, e soamente se, para calquera $u \in F$ existe $v \in F$ de maneira que $a + u = a' + v$. Isto é equivalente a $\mathbf{aa}' \in F$, ou a $a' = a + (u - v) \in a + F = V$.

- (b) En primeiro lugar, se $V \subset W$, necesariamente ocorre que $a \in W$, o que quere dicir que $W = a + G$. Polo tanto, tense que para calquera $v \in F$ existe $u \in G$ de maneira que $a + v = a + u$, o que quere dicir que $u = v$, e polo tanto $F \subset G$. O recíproco é obvio.

- (c) Se $V \subset W$ entón $F \subset G$, polo que

$$\dim V = \dim F \leq \dim G = \dim W.$$

Se as dimensións son iguais quere dicir que $F = G$, e polo apartado anterior temos que $V = W$.

□

Nun espazo afín \mathbb{A} é posible considerar *combinacións lineais de puntos* impondo certas restricións sobre os coeficientes. Sexa $p \in \mathbb{A}$, r vectores $\{u_1, \dots, u_r\} \in E$ e coeficientes $x_1, \dots, x_r \in K$. Sexa $q = p + x_1u_1 + \dots + x_ru_r$. Consideremos os puntos $p_{r+1} = p$ e $p_i = p + u_i \in \mathbb{A}$, con $1 \leq i \leq r$. Entón, podemos escribir

$$\begin{aligned} q &= p + x_1(p_1 - p) + \dots + x_r(p_r - p) \\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^r x_i\right)p_0 + x_1p_1 + \dots + x_rp_r \\ &= x_1p_1 + \dots + x_rp_r + x_{r+1}p_{r+1}. \end{aligned}$$

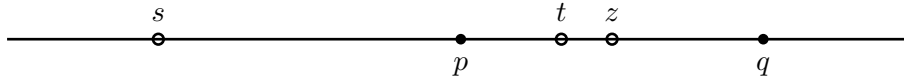
Observamos entón que a suma dos coeficientes dos puntos p_1, \dots, p_{r+1} é igual a 1. De xeito recíproco, unha combinación $\alpha_1p_1 + \dots + \alpha_{r+1}p_{r+1}$, con $\alpha_1 + \dots + \alpha_{r+1} = 1$, tamén determina un punto.

Definición 1.2.2. Sexan $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}$ elementos de K de xeito que $\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i = 1$. Entón, defínese o punto $q = \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i p_i$ como

$$\begin{aligned} q &= \alpha_1p_1 + \dots + \alpha_rp_r + \left(1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i\right)p_{r+1} \\ &= p_{r+1} + \alpha_1(p_1 - p_{r+1}) + \dots + \alpha_r(p_r - p_{r+1}) \\ &= p_{r+1} + \alpha_1\mathbf{p}_{r+1}\mathbf{p}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{p}_{r+1}\mathbf{p}_r. \end{aligned}$$

O punto q está ben determinado e que non depende da orde dos puntos p_i , é dicir, é irrelevante que punto desempeña o papel de p_{r+1} .

Consideremos os puntos $p, q \in \mathbb{A}$. Tense que $z = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = p + \frac{1}{2}(q - p) = p + \frac{1}{2}\mathbf{p}q$, $t = \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q = p + \frac{1}{3}(q - p) = p + \frac{1}{3}\mathbf{p}q$ e $s = 2p - q = p - \mathbf{p}q$. Graficamente observamos que



É importante notar que ao restarmos puntos tamén estamos considerando combinacións lineais nas que a suma de puntos non é 1. Por exemplo, a combinación lineal dos vectores $\mathbf{p}q + \mathbf{q}r$ podémola escribir como $(q - p) + (r - q) = r - p$. Máis en xeral, se $\beta_1, \dots, \beta_{r+1}$ son elementos de K con $\sum_{i=1}^{r+1} \beta_i = 0$ e p_1, \dots, p_{r+1} , entendemos que $\sum_{i=1}^{r+1} \beta_i p_i = \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{p}_{r+1} \mathbf{p}_i$, onde o resultado non depende da elección do punto p_{r+1} . Polo tanto, debemos interpretar que unha combinación lineal de puntos na que os coeficientes sume 1 representa un punto; e se a suma dos coeficientes é 0, representa un vector. Unha combinación lineal na que a suma dos coeficientes non é 0 nin 1 non está ben definida.

Exemplo. Sexan $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}$ elementos de K que suman 1, e $\beta_1, \dots, \beta_{r+1}$ elementos de K que suman 0. Fixamos tamén puntos p_1, \dots, p_{r+1} . A suma $\sum_{i=1}^{r+1} (\alpha_i + \beta_i) p_i$ é o punto

$$p_{r+1} + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \mathbf{p}_{r+1} \mathbf{p}_i.$$

Se en vez de considerar p_{r+1} tomamos, por exemplo, p_1 , o punto que obteríamos é

$$p_1 + (\alpha_{r+1} + \beta_{r+1}) \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_{r+1} + \sum_{i=2}^r (\alpha_i + \beta_i) \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_i.$$

A diferenza entre as dúas expresións é

$$\mathbf{p}_{r+1}\mathbf{p}_1 - (\alpha_{r+1} + \beta_{r+1})\mathbf{p}_{r+1}\mathbf{p}_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{p}_{r+1}\mathbf{p}_1 - \sum_{i=2}^r (\alpha_i + \beta_i)\mathbf{p}_{r+1}\mathbf{p}_1 = 0.$$

É dicir, non importa o punto que fixamos como base.

Por outra banda, as variedades lineais afíns tamén se poden describir en termos de combinacións lineais de puntos.

Proposición 1.2.2. Sexa $V \subset \mathbb{A}$ un subconxunto. Entón V é unha variedade lineal afín de \mathbb{A} se, e soamente se, V contén as combinacións lineais de puntos $p_1, \dots, p_r \in V$.

Demostración. Supoñamos que V é unha variedade lineal afín. Entón, $V = p + F$, polo que $p_i = p + v_i$, para algún $v_i \in F$. Sexan agora $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ de maneira que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. Entón

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i p_i = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \right) p + \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = p + \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \in V.$$

Reciprocamente, supoñamos que V contén tódalas combinacións lineais de puntos, e sexa $p \in V$ un punto fixado. Sexa $F = \langle \mathbf{p}\mathbf{q} \mid q \in V \rangle$. Afirmamos que $V = p + F$, o que é equivalente a dicir que

$$p + \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{p}\mathbf{p}_i = \left(1 - \sum_{i=1}^r \lambda_i \right) p + \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i \in V$$

para $p_1, \dots, p_r \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$. Isto é certo porque estamos supondo que V contén as combinacións lineais de puntos. \square

Pasamos agora á definición das variedades lineais proxectivas. Sexa polo tanto (\mathbb{P}, E, π) un espazo proxectivo.

Definición 1.2.3. A *variedade lineal proxectiva* definida polo subespazo F de E é o subconxunto definido como $L = \pi(F \setminus \{0\}) \subset \mathbb{P}$. Denotámolo por $L = [F]$.

Proposición 1.2.3. Se $L = [F]$ é unha variedade lineal proxectiva de \mathbb{P} definida polo subespazo F , entón $\pi^{-1}(L) = F \setminus \{0\}$ e $F = \pi^{-1}(L) \cup \{0\}$. Hai entón unha bixección entre os subespazos vectoriais de E e as variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} dada ao enviar F a $[F]$ e $\pi^{-1}(L) \cup \{0\}$ a L .

Demostración. Sempre se cumpre que $F \setminus \{0\} = \pi^{-1}(\pi(F \setminus \{0\})) = \pi^{-1}(L)$. En efecto, a inclusión $F \setminus \{0\} \subset \pi^{-1}(\pi(F \setminus \{0\}))$ é evidente; para a oposta, se y é un elemento na preimaxe de $\pi(F \setminus \{0\})$, quere dicir que y é unha preimaxe dun elemento $\pi(x)$. Iso quere dicir que $y = \lambda x$, con λ un escalar de K non nulo, polo que tamén pertence a $F \setminus \{0\}$.

Por outro lado, se F é un subespazo vectorial e $L = [F] = \pi(F \setminus \{0\})$, entón $\pi^{-1}(L) \cup \{0\} = F$. A bixección é entón evidente. \square

Definición 1.2.4. A *dimensión* dunha variedade lineal proxectiva $L = [F]$ é $\dim L = \dim F - 1$.

As seguintes propiedades son evidentes a partir da definición de variedade lineal proxectiva.

Proposición 1.2.4. Sexa \mathbb{P} un espazo proxectivo de dimensión n e sexan $L = [F]$, $M = [G]$ variedades lineais proxectivas.

- (a) $L \subset M$ se, e soamente se, $F \subset G$.
- (b) Se $L \subset M$, entón $\dim L \leq \dim M$. Ademais, se $L \subset M$ e $\dim L = \dim M$, entón $L = M$.
- (c) Tense que $-1 \leq \dim L \leq n$. Ademais, $\dim L = -1$ se, e soamente se L é o conxunto baleiro. Analogamente, $\dim L = n$ se, e soamente se, $L = \mathbb{P}$.

Demostración. Tódalas afirmacións son evidentes empregando os resultados correspondentes ao nivel de espazos vectoriais. \square

Suma e intersección de variedades lineais

Imos traballar agora a suma e a intersección de variedades lineais afíns e proxectivas e establecer unha fórmula de Grassmann en cada un dos casos.

Comezamos co caso afín, no que consideramos dúas variedades lineais afíns $V = a + F$ e $W = b + G$

Proposición 1.2.5. Se a intersección de dúas variedades lineais afíns non é baleira, entón $V \cap W$ é unha variedade lineal. Neste caso, $V \cap W = c + F \cap G$, con $c \in V \cap W$.

Demostración. Como estamos supondo que a intersección non é baleira, sexa $c \in V \cap W$. Entón, $V = c + F$ e $W = c + G$. A intersección estará formada polos puntos q que se poden escribir como $q = c + u = c + v$, onde $u \in F$ e $v \in G$. Da ecuación anterior temos que $u = v$, e polo tanto tense que cumprir que $q = c + u$, con $u \in F \cap G$. Isto demostra que $V \cap W \subset c + F \cap G$. Reciprocamente, se $q \in c + F \cap G$, temos que $q = c + u$, e polo tanto $q \in V$, xa que $u \in F$; e $q \in W$, xa que $u \in G$. \square

Observamos que $V \cap W$ é non baleira se, e soamente se, $b - a \in F + G$. Isto é así xa que se existe un punto c na intersección, entón $c = a + u = b + v$, onde $u \in F$ e $v \in G$. Polo tanto, $b - a = u - v \in F + G$. De xeito recíproco, se $b - a = u - v$, o punto $a + u = b + v$ pertence á intersección das dúas variedades.

En cambio, a unión $V \cup W$ de dúas variedades lineais non ten por que ser unha variedade lineal (é de feito só o será cando unha delas estea contida na outra).

Definición 1.2.5. Sexa $S \subset \mathbb{A}$ un subconxunto. A *variedade lineal afín xerada por S* , que denotamos como $\langle S \rangle$, é a variedade lineal máis pequena que contén S ; é dicir, a intersección de tódalas variedades lineais que conteñen S :

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset V} V,$$

onde V é unha variedade lineal afín.

A definición ten sentido porque a intersección de variedades lineais afíns é sempre unha variedade lineal afín. Por exemplo, a variedade lineal xerada por dous puntos distintos é a recta que pasa por ambos. Podemos definir agora a suma de variedades lineais.

Definición 1.2.6. Defínese a *suma de dúas variedades lineais V e W* como a variedade lineal xerada por V e W , é dicir, $V \vee W := \langle V, W \rangle$.

Proposición 1.2.6. O espazo director de $V \vee W$ é o subespazo $F + G + \langle \mathbf{ab} \rangle$, é dicir,

$$V \vee W = a + (F + G + \langle \mathbf{ab} \rangle).$$

Demostración. Sexa $V \vee W = c + H$. Entón temos que $V \subset V \vee W$ e $W \subset V \vee W$. En concreto, iso quere dicir que $F, G \subset H$. Ademais, $a, b \in V \vee W$, polo que $b - a \in H$. Isto demostra que $a + (F + G + \langle \mathbf{ab} \rangle) \subset V \vee W$. Para ver a inclusión oposta, é suficiente con observar que $a + (F + G + \langle \mathbf{ab} \rangle)$ é unha variedade lineal afín e contén tanto V como W ; por definición $V \vee W$ é a variedade lineal máis pequena que cumpre estas propiedades, polo tanto a inclusión ten que ser unha igualdade. \square

Como consecuencia do anterior tense que

$$\dim(V \vee W) = \begin{cases} \dim(F + G) + 1 & \text{se } \mathbf{ab} \notin F + G, \\ \dim(F + G) & \text{se } \mathbf{ab} \in F + G. \end{cases}$$

Presentamos agora a fórmula de Grassmann afín.

Proposición 1.2.7 (Fórmula de Grassmann). Sexa \mathbb{A} un espazo de dimensión finita n e sexan $V = a + F$ e $W = b + G$ variedades lineais de \mathbb{A} .

(a) Se $V \cap W \neq \emptyset$, entón

$$\dim(V \vee W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

(b) Se $V \cap W = \emptyset$, entón

$$\dim(V \vee W) + \dim(F \cap G) = \dim V + \dim W + 1.$$

Demostración. (a) Vimos que $V \cap W \neq \emptyset$ se, e soamente se, $b - a \in F + G$. Nese caso, $\dim(V \vee W) = \dim(F + G)$. Por outro lado, $\dim(V \cap W) = \dim(F \cap G)$, polo que o resultado é equivalente a

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G,$$

que é a fórmula de Grassmann para subespazos vectoriais.

(b) Neste caso, $\dim(V \vee W) = \dim(F + G) + 1$. Ao igual que antes, podemos concluír aplicando de novo a fórmula de Grassmann para espazos vectoriais. \square

Pasamos agora a traballar o caso proxectivo, no que non haberá que distinguir entre estes dous casos.

Definición 1.2.7. Sexan $L = [F]$ e $M = [G]$ dúas variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} . Entón, $L \cap M$ é a variedade lineal proxectiva definida por $F \cap G$, é dicir, $L \cap M = [F \cap G]$. A mesma definición pódese usar para unha familia de variedades lineais proxectivas.

Definición 1.2.8. Sexan $L = [F]$ e $M = [G]$ dúas variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} . A *suma* de L e M , $L \vee M$, defínese como $L \vee M = [F + G]$.

No caso proxectivo, a fórmula de Grassmann pódese enunciar sen necesidade de distinguir diferentes casos.

Proposición 1.2.8 (Fórmula de Grassmann proxectiva). Sexan L e M dúas variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} . Entón,

$$\dim(L \vee M) + \dim(L \cap M) = \dim L + \dim M.$$

Demostración. Temos que $\dim L = \dim F - 1$ e $\dim M = \dim G - 1$; pola definición da intersección e da suma de variedades, $\dim(L \vee M) = \dim(F + G) - 1$ e $\dim(L \cap M) = \dim(F \cap G) - 1$. Polo tanto, o resultado é equivalente á fórmula de Grassmann para subespazos vectoriais. \square

Posición relativa das variedades afíns

Por último, observamos que no caso afín ten sentido falar da *posición relativa das variedades lineais*, e máis en concreto, da noción de *paralelismo*, que é algo que non ocorre no espazo proxectivo.

Sexan $V = a + F$ e $W = b + G$ dúas variedades lineais afíns.

Definición 1.2.9. Dise que as variedades lineais V e W son *paralelas* se $F \subset G$ ou $G \subset F$. Dise que V e W se *cortan* cando a intersección é non baleira e que se *cruzan* se non son paralelas nin se cortan.

Proposición 1.2.9. Se V e W son paralelas e se cortan, entón unha está incluída noutra, é dicir, ou ben $V \subset W$ ou ben $W \subset V$.

Demostración. Como V e W son paralelas, temos que $F \subset G$ ou $G \subset F$. Supoñamos sen perder xeneralidade que $F \subset G$. Sexa $c \in V \cap W$, que existe polas condicións do enunciado. Entón, $c = a + u = b + v$, onde $u \in F \subset G$ e $v \in G$. Polo tanto, $a - b = v - u \in G$. Iso quere dicir que $a \in b + G = W$. Polo tanto, como $a \in W$ e $F \subset G$ temos que $V \subset W$. \square

1.3. Referencias afíns e proxectivas

O obxectivo desta sección é desenvolver a teoría necesaria para poder traballar con coordenadas, tanto nos espazos afíns como nos proxectivos.

Referencias afíns

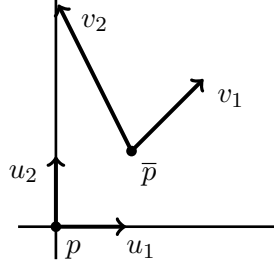
Sexa \mathbb{A} un espazo afín de dimensión n .

Definición 1.3.1. Chamamos *sistema de referencia afín* a un conxunto

$$\mathcal{R} = \{u_1, \dots, u_n; p\}$$

no que $p \in \mathbb{A}$ e $\{u_1, \dots, u_n\}$ é unha base do espazo vectorial E . Diremos que o punto p é a *orixe* de \mathcal{R} .

Exemplo. En $(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2, \mathbb{R}^2, \delta) = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ consideremos $p = (0, 0)$, $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (0, 1)$, entón $\mathcal{R}_1 = \{u_1, u_2; p\}$ é un sistema de referencia afín. Outro exemplo é $\mathcal{R}_2 = \{v_1, v_2; \bar{p}\}$, o sistema de referencia afín dado por $\bar{p} = (1, 1)$, $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 2)$.



Fixado un sistema de referencia \mathcal{R} de \mathbb{A} , podemos establecer unha bixección

$$\mathbb{A} \longrightarrow K^n, \quad q \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

do seguinte xeito:

$$\delta_p: q \mapsto \mathbf{p}q = x_1u_1 + \dots + x_nu_n,$$

polo que a q asóciase a n -tupla (x_1, \dots, x_n) . Pomos $q_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n)$, e se \mathcal{R} está claro polo contexto, podemos omitir o subíndice.

Sexan $\mathcal{R}_1 = \{u_1, \dots, u_n; p\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{v_1, \dots, v_n; \bar{p}\}$ dous sistemas de referencia afíns de \mathbb{A} . Sexa $q \in \mathbb{A}$ un punto con coordenadas en \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 dadas por

$$q_{\mathcal{R}_1} = (x_1, \dots, x_n), \quad q_{\mathcal{R}_2} = (y_1, \dots, y_n).$$

Proposición 1.3.1. Sexa S a matriz de cambio de base de $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\bar{p}_{\mathcal{R}} = (b_1, \dots, b_n)$. Entón,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Demostración. Podemos escribir $\mathbf{p}q = \mathbf{p}\bar{p} + \bar{p}q$. O vector $\mathbf{p}\bar{p}$ é precisamente o que denotamos por (b_1, \dots, b_n) . Logo,

$$\bar{p}q = y_1v_1 + \dots + y_nv_n = S \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

que era o que queriamos ver. □

Por unha cuestión de comodidade, resulta máis axeitado traballar coas chamadas *coordenadas cartesianas ampliadas*. Se as coordenadas dun punto q na referencia \mathcal{R} son (x_1, \dots, x_n) , dicimos que as súas coordenadas ampliadas son $(x_1, \dots, x_n, 1)$. Podemos interpretar as coordenadas ampliadas en termos do espazo proxectivo, xa que estamos vendo o espazo afín dentro do proxectivo pondo a última coordenada igual a 1. Se denotamos como $S = (a_{ij})$, temos entón que a *matriz ampliada* é

$$\tilde{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Deste xeito temos que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{S} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Sexa $\mathcal{R}_1 = \{u_1, u_2; p\}$, con $p = (0, 0)$, $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (0, 1)$, e sexa $\mathcal{R}_2 = \{v_1, v_2; \bar{p}\}$, con $\bar{p} = (1, 1)$, $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 2)$. Entón, a matriz ampliada de cambio de base de \mathcal{R}_1 a \mathcal{R}_2 é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Usando esta matriz, temos que o punto con coordenadas $(1, 0)$ na base \mathcal{R}_1 ten coordenadas $(2, 2)$ na base \mathcal{R}_2 ; e o punto con coordenadas $(0, 1)$ en \mathcal{R}_1 é o $(0, 3)$ en \mathcal{R}_2 .

É sinxelo ver que para facer o cambio de base na dirección oposto chega con considerar a inversa da matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2/3 & 1/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Referencias baricéntricas afíns

Definición 1.3.2. Sexan \mathbb{A} un espazo afín e $p_1, \dots, p_{k+1} \in \mathbb{A}$, con $k \geq 0$. Dicimos que p_1, \dots, p_{k+1} son *puntos (linealmente) independentes* se, e soamente se, os vectores $v_1 = p_1 - p_{k+1}, \dots, v_k = p_k - p_{k+1}$ de E son linealmente independentes. Ás veces tamén se usa a terminoloxía de *puntos afinmente equivalentes*. Se $k = 0$, entenderemos que un punto $\{p_1\}$ é independente.

As propiedades de independencia lineal en espazos vectoriais tradúcense sen dificultade ás propiedades correspondentes dos puntos nun espazo afín.

Proposición 1.3.2. Coas notacións da definición anterior, cúmprense as seguintes propiedades:

- (a) A definición de independencia de puntos non depende da orde: p_1, \dots, p_{k+1} son puntos independentes se, e soamente se, $p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{k+1}, p_i$ son puntos independentes, onde a notación \hat{p}_i quere dicir que se omite o punto p_i na enumeración.
- (b) Se \mathbb{A} é un espazo afín de dimensión n e $k > n$, entón p_1, \dots, p_{k+1} son puntos dependentes.
- (c) Se \mathbb{A} é un espazo afín de dimensión n e $k < n$, calquera $k+1$ puntos independentes p_1, \dots, p_{k+1} pódense completar ata $n+1$ independentes $p_1, \dots, p_{k+1}, \dots, p_{n+1}$.

Demostración. (a) Supoñamos que os puntos $p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{k+1}, p_i$ son puntos independentes. Imos demostrar que os puntos p_1, \dots, p_{k+1} tamén o son. Se non o fosen, existiría unha combinación lineal da forma $\sum_{j=1}^k \lambda_j (p_j - p_{k+1}) = 0$. Agora ben, temos que

$$0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j (p_j - p_{k+1}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (p_j - p_i) - \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right) (p_{k+1} - p_i),$$

polo que os puntos $p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{k+1}, p_i$ serían independentes, que é unha contradición.

- (b) Nun espazo vectorial de dimensión n , un conxunto que ten $n+1$ vectores ou máis é sempre linealmente independente.
- (c) Consideramos os vectores $v_1 = \mathbf{p}_{k+1}\mathbf{p}_1, \dots, v_k = \mathbf{p}_{k+1}\mathbf{p}_k$; polo teorema de Steinitz, podemos completar estes vectores ata ter unha base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Para $j = k+2, \dots, n+1$, definimos $p_j = \alpha(v_j, p_{k+1})$. Entón, o conxunto de puntos $p_1, \dots, p_{k+1}, \dots, p_{n+1}$ é independente. \square

Sexa \mathbb{A} un espazo afín de dimensión n . Dar un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{u_1, \dots, u_n; p\}$ é equivalente a dar $n+1$ puntos independentes e ordenados, $\{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}\}$, onde o último punto é a orixe. Neste caso falamos de *sistema de referencia baricéntrico*.

Definición 1.3.3. Sexa \mathbb{A} un espazo afín de dimensión n e $\mathcal{B} = \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ un sistema de referencia baricéntrico de \mathbb{A} . Sexa $q \in \mathbb{A}$. Chamamos *coordenadas baricéntricas* de q no sistema de referencia \mathcal{B} á $(n+1)$ -tupla $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in K^{n+1}$ que cumpre

$$q = x_1 p_1 + \dots + x_{n+1} p_{n+1}, \quad x_1 + \dots + x_{n+1} = 1.$$

Supoñamos de cara á seguinte definición que $(m, \text{car}(K)) = 1$, onde como é habitual $\text{car}(K)$ é a característica do corpo K .

Definición 1.3.4. Sexan $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{A}$, non necesariamente independentes. Se m é invertible en K (isto é, se m é coprimo coa característica de K), o *baricentro* de p_1, \dots, p_m é o punto

$$b = \frac{1}{m} p_1 + \dots + \frac{1}{m} p_m.$$

Proposición 1.3.3. O baricentro b de p_1, \dots, p_m é o único punto de \mathbb{A} tal que

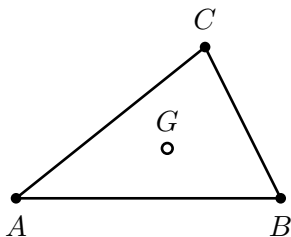
$$\mathbf{b}p_1 + \dots + \mathbf{b}p_m = 0.$$

Demostración. O baricentro cumpre esa condición xa que

$$\mathbf{b}p_1 + \dots + \mathbf{b}p_m = (p_1 - b) + \dots + (p_m - b)$$

polo definición de baricentro. Supoñamos que hai outro punto b' que cumpre a mesma condición. Restando as dúas ecuacións chegamos a $m\mathbf{b}b' = 0$, o que quere dicir que $b = b'$. \square

Exemplo. Consideremos un triángulo de vértices $A, B, C \in \mathbb{A}$. Entón, o baricentro do triángulo é $b = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = A + \frac{1}{3}\mathbf{A}B + \frac{1}{3}\mathbf{A}C$.



No estudo da xeometría do triángulo ou doutros polígonos, é habitual referirse ao baricentro coa letra G (que fai referencia a que é o centro de gravidade).

Referencias proxectivas

Un fenómeno que pode resultar curioso do caso afín é a dicotomía existente entre puntos e vectores; hai unha interacción entre dúas entidades diferentes, e un sistema de referencia pasa por dar $n + 1$ obxectos: vimos a situación máis común, cun punto e n vectores, e tamén o caso de $n + 1$ puntos. Porén, non hai motivos polos que un non poida considerar m puntos e $n + 1 - m$ vectores, se $1 \leq m \leq n$. Desde o punto de vista proxectivo, os vectores son simplemente puntos no *hiperplano do infinito*, polo tanto neste caso todo será máis doado: unha referencia consistirá simplemente en dar $n + 1$ puntos independentes. Imos comezar por introducir este concepto.

Antes de introducir o concepto de referencia proxectiva, imos discutir o significado de independencia lineal.

Definición 1.3.5. Sexan F_1, \dots, F_{r+1} subespazos de E . Dise que son *linealmente independentes* se $\dim(F_1 + \dots + F_{r+1}) = \dim F_1 + \dots + \dim F_{r+1}$. Sexan $L_1 = [F_1], \dots, L_{r+1} = [F_{r+1}]$ variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} . Diremos que as variedades lineais proxectivas L_i son *independentes* se, e soamente se, F_1, \dots, F_{r+1} son linealmente independentes. En caso contrario dicimos que son *dependentes*.

No caso de dimensión 1, se $F = \langle u \rangle$, pomos simplemente $p = [u]$, en lugar de $p = [\langle u \rangle]$.

Proposición 1.3.4. Sexan $L = [F]$ unha variedade lineal proxectiva de \mathbb{P} de $\dim L = d$. Sexa $q_1 = [u_1], \dots, q_{r+1} = [u_{r+1}]$ un conxunto de $r + 1$ puntos de L , $u_i \in F$.

- (a) Se q_1, \dots, q_{r+1} son linealmente independentes, entón $r \leq d$ e existen q_{r+2}, \dots, q_{d+1} en L tales que $q_1, \dots, q_{r+1}, \dots, q_{d+1}$ son linealmente independentes e xeran L ; é dicir, $L = q_1 \vee \dots \vee q_{d+1}$.
- (b) Se q_1, \dots, q_{r+1} xeran L , entón $r \geq d$ e existe un subconxunto $\{q_{i_1}, \dots, q_{i_{d+1}}\}$ de $\{q_1, \dots, q_{r+1}\}$ tales que $q_{i_1}, \dots, q_{i_{d+1}}$ son linealmente independentes e xeran L , é dicir, $L = q_{i_1} \vee \dots \vee q_{i_{d+1}}$.
- (c) Se $r = d$, entón q_1, \dots, q_{d+1} son linealmente independente se, e soamente se, os puntos q_1, \dots, q_{d+1} xeran L .

Demostración. A demostración é consecuencia de propiedades elementais de álgebra lineal.

- (a) Un conxunto de vectores linealmente independentes ten, como moito, tantos elementos como a dimensión do espazo. Se $r \leq d$, polo teorema de Steinitz podemos completar a base $\{u_1, \dots, u_{r+1}\}$ a unha base $\{u_1, \dots, u_{d+1}\}$ e definir $q_i = [u_i]$. Nese caso, $L = q_1 \vee \dots \vee q_{d+1}$.
- (b) Un conxunto de vectores xeradores ten, polo menos, tantos elementos como a dimensión do espazo. En caso de que haxa máis, un deles será combinación lineal dos outros, polo que o podemos eliminar. Iterando o proceso, podemos acabar cun conxunto de d vectores que sexan xeradores e independentes.
- (c) Nun espazo de dimensión d , tense que d vectores son linealmente independentes se, e soamente se, son xeradores.

□

A proposición anterior permítenos facer a seguinte definición.

Definición 1.3.6. Sexa L unha variedade lineal proxectiva de \mathbb{P} . Un *suplementario* de L é unha variedade lineal proxectiva M de \mathbb{P} tal que $L \vee M = \mathbb{P}$ e $L \cap M = \emptyset$.

Sexa $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$ un espazo proxectivo de dimensión n . Consideramos unha base $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ de E . Consideramos os puntos linealmente independentes $p_1 = [u_1], \dots, p_{n+1} = [u_{n+1}]$. Entón, se $p = [x] \in \mathbb{P}$, con $x \in E \setminus \{0\}$, podemos representar x en función das súas coordenadas en \mathcal{B}_u , como (x_1, \dots, x_{n+1}) . Supoñamos agora que cambiamos u_1 por $u'_1 = 2u_1$. Entón,

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_{n+1} u_{n+1} = (1/2)2x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_{n+1} u_{n+1},$$

e polo tanto teriamos unha nova $(n+1)$ -tupla, a $(x_1/2, x_2, \dots, x_{n+1})$, que cando $x_1 \neq 0$ non é proporcional á anterior. Polo tanto, estas coordenadas non están ben definidas, xa que dependen da elección dos representantes u_i de cada p_i . Cómpre, polo tanto, coller un punto extra, que chamaremos *punto unidade* que forzará que tódolos representantes se movan á vez.

Definición 1.3.7. Unha *referencia proxectiva* de \mathbb{P} é un conxunto $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ de $n+2$ puntos de \mathbb{P} de maneira que calquera subconxunto de $n+1$ puntos é linealmente independentes. Os puntos p_1, \dots, p_{n+1} chámanse *vértices* da referencia e U chámase *punto unidade*.

Se $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ é unha referencia proxectiva de \mathbb{P} , unha *base adaptada* a \mathcal{R} é unha base u_1, \dots, u_{n+1} de E tal que $p_1 = [u_1], \dots, p_{n+1} = [u_{n+1}]$ e $U = [u_1 + \dots + u_{n+1}]$.

As coordenadas proxectivas dun punto $q = [v]$ son os elementos de K dados por (x_1, \dots, x_{n+1}) , de xeito que $v = \sum_{i=1}^{n+1} x_i u_i$. As coordenadas están ben definidas salvo multiplicación por un elemento de K^\times , é dicir, podemos multiplicar tódolos elementos por un mesmo escalar non nulo. A modo de notación, escribiremos $q = [(x_1, \dots, x_{n+1})]$ ou simplemente $[x_1 : \dots : x_{n+1}]$. O feito de que exista este grao de liberdade extra simplifica o traballo nalgúns problemas xeométricos nos que é útil traballar con coordenadas. Por exemplo, se no plano afín se define un cuadrilátero $ABCD$, podemos fixar o punto A como a orixe de coordenadas e \mathbf{AB} e \mathbf{AC} como os vectores da referencia; é dicir, pór coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$; en cambio, o punto D terá coordenadas xenéricas (x, y) , con x e y non nulos. No plano proxectivo, en cambio, podemos fixar un sistema de referencia $\{A, B, C; D\}$, e pór coordenadas $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$, $C = [0 : 0 : 1]$ e $D = [1 : 1 : 1]$.

De cara á seguinte definición, sexan \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 dúas referencias proxectivas, e $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ e $\mathcal{B}_v = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ as correspondentes bases adaptadas. Como é habitual, escribimos $(\mathbb{I})_{v,u}$ para denotar a matriz de cambio de base de \mathcal{B}_v a \mathcal{B}_u (que reflicte o feito de que esa matriz é a da identidade cando se toma a base \mathcal{B}_v no espazo de saída e a base \mathcal{B}_u no espazo de chegada).

Definición 1.3.8. A *matriz de cambio de referencia* de \mathcal{R}_2 a \mathcal{R}_1 é o elemento $(\mathbb{I})_{\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1} = [(\mathbb{I})_{v,u}]$ de $\mathbb{P}(\mathcal{M}_{n+1}(K))$. É dicir, o subespazo vectorial de dimensión 1 xerado pola matriz non nula $(\mathbb{I})_{v,u}$.

Exemplo. Imos volver ao exemplo que discutimos no caso afín, collendo agora $\mathcal{R}_1 = \{[u_1], [u_2], [u_3]; [u_1 + u_2 + u_3]\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{[v_1], [v_2], [v_3]; [v_1 + v_2 + v_3]\}$, con $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$; e $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 2, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. Entón, a matriz de cambio de referencia de \mathcal{R}_2 a \mathcal{R}_1 é $[M]$, onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

É dicir, un cambio de referencia afín pódese ver de xeito natural no proxectivo: os vectores vense entón como direccións, isto é, puntos no hiperplano do infinito; mentres que o punto que fai o papel de orixe é un punto *normal*.

Traballar con coordenadas facilita a comprensión de certos resultados. Por exemplo, tense a seguinte bixección.

Proposición 1.3.5. Hai unha correspondencia bixectiva entre K^n e $\mathbb{P}_K^n \setminus \{x_{n+1} = 0\}$ dada polas aplicacións

$$\varphi: K^n \longrightarrow \mathbb{P}_K^n \setminus \{x_{n+1} = 0\}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$$

e

$$\psi: \mathbb{P}_K^n \setminus \{x_{n+1} = 0\} \longrightarrow K^n, \quad [x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}] \mapsto (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1}),$$

que son inversas unha da outra.

Demostración. Trátase dunha comprobación rutineira. \square

Por outro lado, hai tamén unha bixección entre $\{(x_1 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{P}_K^n \mid x_{n+1} = 0\}$ e \mathbb{P}_K^{n-1} . Polo tanto, $\mathbb{P}_K^n \simeq K^n \sqcup \mathbb{P}_K^{n-1}$. En particular, isto dinos que se \mathbb{F}_q é un corpo finito de q elementos, o número de puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$ é

$$q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1 = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

1.4. Completación proxectiva de espazos afíns

Unha vez introducimos os espazos afíns e proxectivos, o seguinte obxectivo pasar por discutir como mergullar un espazo afín nun proxectivo, o que será de gran utilidade para algunhas das aplicacións que nos interesa discutir. Imos discutir dúas cuestións diferentes: a primeira, como a partir dun espazo proxectivo podemos construír un espazo afín eliminando un hiperplano; a segunda, como completar un espazo afín para construír un proxectivo.

Proposición 1.4.1. Sexan (\mathbb{P}, E, π) un espazo proxectivo de dimensión n , $H = [G]$ un hiperplano e $\langle e \rangle$ un complementario de G en E . Sexa $\mathbb{B} := \mathbb{P} \setminus H$.

- (a) Para todo $p \in \mathbb{B}$ existe un único $u \in G$ tal que $p = [e + u]$.
- (b) Sexa $p \in \mathbb{B}$. A aplicación $\delta: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow G$ dada por

$$\delta(q, r) = \mathbf{qr} = v - u,$$

onde $u, v \in G$, $q = [e + u]$ e $r = [e + v]$, define unha estrutura de espazo afín en \mathbb{B} .

- (c) A aplicación $\alpha: G \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ dada por

$$\alpha(v, [e + u]) = [e + u] + v := [e + (u + v)]$$

define a mesma estrutura.

Polo tanto, (\mathbb{B}, G, δ) é un espazo afín de espazo director G coa mesma dimensión que \mathbb{P} .

Demostración. (a) Sexa $p \in \mathbb{B}$, con $p = [x]$ e $x \in E \setminus G$. Como $E = \langle e \rangle \oplus G$, entón $x = \lambda e + u'$, con $\lambda \neq 0$ e $u' \in G$. Dividindo por λ e pondo $u = (1/\lambda)u' \in G$, entón $p = [x] = [e + u]$. Se $p = [e + w]$, entón $e + u = \mu(e + w)$, para $\mu \neq 0$. Como $\langle e \rangle$ e G están en suma directa, $\mu = 1$ e $w = u$. Isto non só demostra a primeira parte, senón que tamén proba que δ e α non dependen dos representantes.

(b) Temos que comprobar que se cumpre a relación de Chasles e a homoxeneidade. Para a primeira, se $p = [e + u]$, $q = [e + v]$ e $r = [e + w] \in \mathbb{B}$, entón $\mathbf{p}q + \mathbf{q}r = (v - u) + (w - u) = w - u = \mathbf{p}r$. Para a homoxeneidade, fixemos $p = [e + u] \in \mathbb{B}$. Temos que ver que $\delta_p(q) = \mathbf{p}q$ é bixectiva. Para a inxectividade, sexan $q = [e + v]$, $r = [e + w] \in \mathbb{B}$ de maneira que $\mathbf{p}q = \mathbf{p}r$. Entón $v - u = w - u$ e polo tanto $v = w$, polo que $q = r$. Para a sobrexectividade, sexa $v \in G$. Collemos $q = [e + (u + v)]$ e temos $\mathbf{p}q = u + v - u = v$. Polo tanto, a aplicación $\delta_p: \mathbb{B} \rightarrow G$, $\delta(p, q) = \mathbf{p}q$ é bixectiva.

(c) Calculamos o punto $p + v$, onde $p = [e + u] \in \mathbb{B}$ e $v \in G$. Entón, $p + v = q$, onde $q \in \mathbb{B}$ e $\mathbf{p}q = v$. Polo tanto, se $q = [e + w]$, cómpre que $v = \mathbf{p}q = w - u$, co cal $w = u + v$ e $q = [e + (u + v)]$. É dicir, $[e + u] + v = [e + (u + v)]$. De aquí dedúcese inmediatamente que α define unha acción simplemente transitiva.

Observamos que $\dim \mathbb{B} = \dim G = \dim E - 1 = \dim \mathbb{P}$. □

En particular, se $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$ é un espazo proxectivo de dimensión n , existen $n + 1$ hiperplanos H_0, H_1, \dots, H_n de \mathbb{P} e $n + 1$ espazos afíns $\mathbb{B}_i := \mathbb{P} \setminus H_i$ tales que $\mathbb{P} = \mathbb{B}_0 \cup \mathbb{B}_1 \cup \dots \cup \mathbb{B}_n$.

Exemplo. Consideramos o espazo proxectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, con coordenadas $[x_1 : x_2 : x_3]$. Fixamos unha referencia proxectiva $\mathcal{R} = \{[u_1], [u_2], [u_3]; [u_1 + u_2 + u_3]\}$, con $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Collemos agora como hiperplano do infinito H_1 a recta $x_3 = 0$, que non contén ningún dos puntos da referencia. Como $H_1 = [\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle]$, temos que un complementario é $e_3 = (0, 0, 1)$. Sexan q, r e p os puntos afíns correspondentes a u_1, u_2 e u_3 , respectivamente. Un punto que non pertenza á recta do infinito pódese escribir como $(x_1, x_2, 1) = (0, 0, 1) + (x_1, x_2, 0)$, e en particular aos puntos da referencia correspóndenlle os vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0)$, respectivamente. Polo tanto, os vectores da referencia afín $\{\mathbf{p}q, \mathbf{p}r; p\}$ son $v_1 = \mathbf{p}q = (1, 0, 0)$ e $v_2 = \mathbf{p}r = (0, 1, 0)$ (para obter eses vectores restamos os vectores de H_1 do xeito descrito na proposición). Como $(x_1, x_2, 0) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0)$, temos que as coordenadas afíns dun punto con coordenadas proxectivas $[x_1 : x_2 : 1]$ son (x_1, x_2) .

Imos agora coller a mesma referencia proxectiva, pero como hiperplano do infinito H_2 a recta $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, á que tampouco pertence ningún punto da referencia. Como $H_2 = [\langle (1, -1, 0), (1, 0, -1) \rangle]$, un complementario é $e_3 = (1, 0, 0)$. Entón, temos que

$$\frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + \left(\frac{-x_2 - x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}, \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \right).$$

Os puntos da referencia correspóndenlle cos vectores de H_2 iguais a $(-1/2, 0, 1/2)$, $(-1, 1/2, 1/2)$ e $(-1, 0, 1)$, respectivamente. Polo tanto, a referencia afín $\{\mathbf{p}q, \mathbf{p}r; p\}$ (que corresponde aos mesmos puntos que no caso anterior) ten como vector asociado a p o $(-1, 0, 1)$ e $v_1 = \mathbf{p}q = (1/2, 0, -1/2)$, $v_2 = \mathbf{p}r = (0, 1/2, -1/2)$. En particular, para achar as coordenadas afíns dun punto con coordenadas proxectivas $[x_1 : x_2 : x_3]$, facemos

$$\left(\frac{-x_2 - x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}, \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \right) - (-1, 0, 1) = y_1 v_1 + y_2 v_2.$$

Temos polo tanto as coordenadas afíns (y_1, y_2) , con

$$y_1 = \frac{2x_1}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad y_2 = \frac{2x_2}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Estes cálculos mostran que o punto medio dun segmento non está ben definido en coordenadas proxectivas. No caso no que consideramos H_1 como recta do infinito, o punto medio de $(0, 0)$ e $(1, 0)$ é o $(1/2, 0)$. En cambio, no segundo caso é o $(1/3, 0)$. Isto motivará na seguinte sección a introdución da razón dobre.

Proposición 1.4.2. Sexa \mathbb{A} un espazo afín. Entón, existe un espazo proxectivo $\bar{\mathbb{A}}$, con $\dim \bar{\mathbb{A}} = \dim \mathbb{A}$ e un hiperplano \mathbb{A}_∞ de $\bar{\mathbb{A}}$ de maneira que se $\mathbb{B} := \bar{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{A}_\infty$, entón hai unha bixección entre \mathbb{A} e \mathbb{B} . O espazo proxectivo $\bar{\mathbb{A}}$ chámase a *clausura proxectiva* de \mathbb{A} .

Demostración. Sexa E o espazo director de \mathbb{A} . Entón,

$$\bar{E} := E \times K = \{(u, \lambda) \mid u \in E, \lambda \in K, \}$$

é un espazo vectorial e

$$E_\infty := \{(u, 0) \in \bar{E} \mid u \in E\}$$

é o subespazo vectorial de \bar{E} . Consideramos entón $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$ dado por $\varphi(u) = (u, 0)$; o morfismo é inxectivo e $\varphi(E) = E_\infty$. Polo tanto, $E \simeq E_\infty$.

Sexa agora $e := (0, 1) \in \bar{E}$. Entón $\bar{E} = \langle e \rangle \oplus E_\infty$, polo que $\dim \bar{E} = \dim E + 1$. Sexa $\bar{\mathbb{A}} := \mathbb{P}(\bar{E})$ o proxectivizado de \bar{E} , de maneira que $\bar{\mathbb{A}}$ é un espazo proxectivo, $\dim \bar{\mathbb{A}} = \dim \bar{E} - 1 = \dim E = \dim \mathbb{A}$. Sexa $\mathbb{A}_\infty := [E_\infty]$. Como $\dim E_\infty = \dim \bar{E} - 1$, \mathbb{A}_∞ é un hiperplano de $\bar{\mathbb{A}}$. Polo resultado anterior sabemos que $\mathbb{B} := (\bar{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{A}_\infty, E_\infty)$ é un espazo afín. Ademais, para todo $q \in \mathbb{B}$ existe un único $u \in E$ tal que $q = [(u, 1)] = [e + (u, 0)]$. Para establecer a bixección entre \mathbb{A} e \mathbb{B} , fixamos $p \in \mathbb{A}$, que fará o papel de orixe. Sexa $\iota: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$ dada por $\iota(p) := [(0, 1)]$, que se corresponde co feito de que este punto sexa a orixe; e $\iota(q) := [(\mathbf{p}q, 1)]$. Entón $\iota(\mathbb{A}) \subset \mathbb{B}$. Tense ademais que $\iota(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ xa que se $q \in \mathbb{B}$ sabemos que $q = [(u, 1)]$, con $u \in E$ e podemos tomar como preimaxe $q := p_{n+1} + u \in \mathbb{A}$. Nese caso, $u = \mathbf{p}q$ e $r = [(u, 1)] = [(\mathbf{p}q, 1)] = \iota(p)$. Finalmente, ι é unha aplicación claramente inxectiva, xa que da definición temos que se $\iota(q) = \iota(r)$ entón $\mathbf{p}q = \mathbf{p}r$, o que quere dicir que $q = r$. □

A bixección que demos entre \mathbb{A} e \mathbb{B} e de feito un isomorfismo de espazos afíns. Iso quere dicir que $\iota: (\mathbb{A}, E) \rightarrow (\bar{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{A}_\infty, E_\infty)$ é un isomorfismo asociado ao isomorfismo $\varphi: E \rightarrow E_\infty$ xa que

$$\iota(q) + \varphi(\mathbf{q}r) = [(\mathbf{p}q, 1)] + (\mathbf{q}r, 0) = [(\mathbf{p}r + \mathbf{q}r, 1)] = [(\mathbf{p}r, 1)] = \iota(r).$$

Afondaremos máis nesta idea en temas sucesivos.

Definición 1.4.1. Dado $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, E)$ chamamos $\bar{\mathbb{A}} = (\mathbb{P}(\bar{E}), \bar{E}, \pi)$ a *clausura proxectiva* de \mathbb{A} . A $\mathbb{A}_\infty = [E_\infty]$ chamámoslle o *hiperplano do infinito*, e os seus puntos son os *puntos do infinito* de \mathbb{A} . O punto fixado de \mathbb{A} denotámolo como p . Pomos $\bar{q} := \iota(q) = [(\mathbf{p}q, 1)]$ para referirnos á imaxe do punto $q \in \mathbb{A}$ en $\bar{\mathbb{A}}$ pola aplicación $\iota: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$.

Exemplo. A clausura proxectiva de \mathbb{A}_K^2 correspóndese co proxectivizado de K^3 , $\mathbb{P}(K^3)$. Nese caso, a aplicación $\iota: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$ é a que envía un punto (a, b) a $(a, b, 1)$. Os elementos de \mathbb{A}_∞ son os correspondentes ás clases $[a : b : 0]$, é dicir, á recta do infinito.

Definición 1.4.2. Sexa $V = q + F$ unha variedade lineal afín. Definimos $F_\infty := \varphi(F) = \{(u, 0) \in \bar{E} \mid u \in F\} \subset E_\infty$ e $V_\infty := [F_\infty] \subset [E_\infty] = \mathbb{A}_\infty$. Tense que V_∞ é unha variedade lineal proxectiva de dimensión $\dim V - 1$. Os seus elementos chámanse *puntos do infinito* de L . A *clausura proxectiva* de V en $\bar{\mathbb{A}}$ é $\bar{V} := \iota(V) \cup V_\infty \subset \bar{\mathbb{A}}$.

A seguinte proposición permite obter de xeito sinxelo a *clausura proxectiva* de $L = q + F$. Esencialmente, dinos que é suficiente considerar a variedade obtida ao incluír o punto q e logo as direccións correspondentes a cada dirección de F . Para o enunciado, necesitamos fixar, como de costume, un punto p que faga o papel de orixe.

Proposición 1.4.3. Coas notacións anteriores, sexa $\bar{F} := \langle(\mathbf{pq}, 1)\rangle \oplus F_\infty$. Entón, $\bar{V} = [\bar{F}]$ é unha variedade lineal proxectiva de $\dim \bar{V} = \dim V$. Ademais, \bar{V} non está contida en \mathbb{A}_∞ .

Demostración. Observamos que a intersección $\langle(\mathbf{pq}, 1)\rangle \cap F_\infty$ é baleira, xa que se $\lambda(\mathbf{pq}, 1) = (u, 0) \in F_\infty$, entón $\lambda = 0$. Imos ver agora que $\bar{V} \subset [\bar{F}]$. Como $F_\infty \subset \bar{F}$, entón $V_\infty = [F_\infty] \subset [\bar{F}]$. Collemos $r = q + u \in V$, $u = \mathbf{qr} \in F$. Entón, $(\mathbf{pr}, 1) = (\mathbf{pq}, 1) + (\mathbf{qr}, 0) \in \bar{F}$ e $\iota(r) = [(\mathbf{pr}, 1)] \in [\bar{F}]$. É dicir, $\bar{V} = \iota(V) \cup V_\infty \subset [\bar{F}]$.

Pasamos á inclusión oposta. Sexa $t = [w] \in [\bar{F}]$, con $w = \lambda(\mathbf{pq}, 1) + (u, 0)$ e $u \in F$. Se $\lambda = 0$, entón $w = (u, 0) \in F_\infty \subset \bar{F}$ e $t = [w] \in [\bar{F}]$. Se $\lambda \neq 0$, entón $t = [\lambda^{-1}w] = [(\mathbf{pq}, 1) + (\lambda^{-1}u, 0)] = [(\mathbf{pq}, 1)] + (\lambda^{-1}u, 0)$. Pomos entón $r = q + v \in V$, con $v = \mathbf{qr} \in F$, de maneira que $\iota(r) = [(\mathbf{pr}, 1)]$ sexa igual a $t = [w]$. É dicir, $v = \mathbf{qr} = \lambda^{-1}u$. Nese caso,

$$\iota(r) = [(\mathbf{pq}, 1)] + (\mathbf{qr}, 0) = [(\mathbf{pq}, 1)] + (\lambda^{-1}u, 0) = [\lambda^{-1}w] = q.$$

Concluimos que $t \in \iota(V)$. Finalmente, $\dim \bar{V} = \dim \bar{F} - 1 = \dim F_\infty = \dim F = \dim V$. Como \bar{F} non está contida en E_∞ , entón \bar{V} tampouco pode estar contida en \mathbb{A}_∞ . \square

Exemplo. Sexa $r: (1, 0) + \lambda(1, 1)$ a recta que pasa polo punto $(1, 0)$ e ten dirección $(1, 1)$. Entón, a clausura proxectiva é a recta que pasa por $[1 : 0 : 1]$ e por $[1 : 1 : 0]$. É dicir, consideramos a inclusión do punto de paso no proxectivo e logo *unímola* co punto da recta do infinito correspondente ao vector director.

Corolario 1.4.1. Sexan V e W dúas variedades lineais afíns de \mathbb{A} . Entón V e W son paralelas se, e soamente se, $V_\infty \subset W_\infty$ ou $W_\infty \subset V_\infty$. Se $\dim V = \dim W$, entón V e W son paralelas se, e soamente se, $V_\infty = W_\infty$. Se V e W son dúas rectas de \mathbb{A} , entón son paralelas se, e soamente se, a intersección de V_∞ e W_∞ é un punto.

Demostración. Temos que $V = q + F$ e $W = r + G$ son paralelas se $F \subset G$ ou $G \subset F$; iso é equivalente a $V_\infty \subset W_\infty$ ou $W_\infty \subset V_\infty$. \square

Exemplo. As rectas $r: (1, 0) + \lambda(1, 1)$ e $s: (2, 0) + \mu(1, 1)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, son paralelas en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Coas notacións anteriores, ao considerar as súas completacións proxectivas, córtanse no punto $[(1, 1, 0)]$, que está na recta do infinito.

Imos considerar por último como definir a referencia proxectiva asociada a unha referencia afín, tanto no caso cartesiano como no baricéntrico.

Definición 1.4.3. Sexa (\mathbb{A}, E, δ) un espazo afín e $\mathcal{R} = \{u_1, \dots, u_n; q\}$ unha referencia afín de \mathbb{A} . Sexa $p \in \mathbb{A}$ e consideremos a clausura proxectiva de \mathbb{A} , $\bar{\mathbb{A}} = (\mathbb{P}(\bar{E}), \bar{E}, \pi)$. O conxunto $\bar{\mathcal{R}} = \{[(u_1, 0)], \dots, [(u_n, 0)], [(\mathbf{pq}, 1)]; [(e_1 + \dots + e_n + \mathbf{pq}, 1)]\}$ é unha referencia proxectiva de \mathbb{A} e $\mathcal{B}_u = \{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (\mathbf{pq}, 1)\}$ é unha base adaptada de \mathcal{R} . Chámase *referencia proxectiva asociada a \mathcal{R}* .

Definición 1.4.4. Sexa $\mathcal{B} = \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ unha referencia baricéntrica de \mathbb{A} . A referencia proxectiva asociada á referencia baricéntrica \mathcal{B} é $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n+1}; \bar{b}\}$, onde b é o baricentro de p_1, \dots, p_{n+1} .

Coas notacións anteriores, $\bar{\mathcal{B}}$ é unha referencia proxectiva. Ademais, se $q \in \mathbb{A}$ ten coordenadas baricéntricas (x_1, \dots, x_{n+1}) en \mathcal{B} , con $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$, entón \bar{q} ten coordenadas proxectivas $(x_1 : \dots : x_{n+1})$ en $\bar{\mathcal{B}}$.

1.5. Ecuacións das variedades lineais

Ecuacións das variedades lineais afíns

As ecuacións paramétricas dunha variedade lineal afín $V = a + F$ corresponden á expresión dos puntos de V en termos dunha base de F . Sexa $\{v_1, \dots, v_r\}$ unha base de F ; se $q \in V$, entón podemos escribir

$$q = a + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r,$$

e dicimos que estas son as *ecuacións paramétricas* de V . Tomando un sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R} = \{w_1, \dots, w_n; p_{n+1}\}$, podemos escribir esta expresión usando as coordenadas de a e de v_1, \dots, v_r neste sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ \vdots \\ v_{1,n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} v_{r,1} \\ \vdots \\ v_{r,n} \end{pmatrix}.$$

Do mesmo xeito, as variedades lineais corresponden aos conxuntos de solucións de ecuacións lineais, non necesariamente homoxéneas, nas coordenadas en \mathcal{R} .

Proposición 1.5.1. Un subconxunto $V \subset \mathbb{A}$ é unha variedade lineal se, e soamente se, as coordenadas dos seus puntos no sistema \mathcal{R} son solucións dun sistema lineal compatible $Ax = b$. As ecuacións do sistema chámanse *ecuacións cartesianas* de V .

Cando este sistema é compatible, as súas solucións pódense escribir como $V = a + \ker A$, onde a é unha solución particular do sistema. A dimensión de V e o rango de A relaciónanse mediante a expresión $\dim V = n - \text{rango } A$.

Polo tanto, cando V está definida por un sistema de ecuacións $Ax = b$, obtemos as súas ecuacións paramétricas encontrando unha solución a do sistema e unha base de $\ker A$. Reciprocamente, dadas as ecuacións paramétricas, obtemos as ecuacións cartesianas observando que $q \in V$ se, e soamente se, $q - a \in F$, de onde resulta o sistema

$$\text{rango} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_{1,1} & \dots & v_{1,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - a_n & v_{1,n} & \dots & v_{r,n} \end{pmatrix} = r.$$

Proposición 1.5.2. Sexa \mathbb{A} un espazo afín de dimensión n e $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ un sistema de referencia baricéntrico. Sexan $q_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n+1})$, con $\sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} = 1$, $n+1$ puntos de \mathbb{A} . Entón, q_1, \dots, q_{n+1} están contidos nun hiperplano se, e soamente se, $\det(a_{i,j}) = 0$. En particular, se $q_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3})$, $q_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3})$ e $q_3 = (a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3})$, entón q_1, q_2 e q_3 están aliñados se, e soamente se,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0.$$

Demostración. É unha comprobación inmediata. \square

Exemplo. Sexa ABC un triángulo en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ e consideramos a referencia baricéntrica dada polos vértices do triángulo, é dicir, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Sexa $G = (1/3, 1/3, 1/3)$ o baricentro e $M = (0, 1/2, 1/2)$ o punto medio de AB . Entón, A , G e M están aliñados xa que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuacións proxectivas

Sexa $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$ un espazo proxectivo de dimensión n e $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ unha referencia proxectiva de \mathbb{P} , con $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ unha base adaptada. Sexa $L = [F]$ unha variedade lineal proxectiva de dimensión d , onde $F = \langle v_1, \dots, v_{d+1} \rangle$ e con v_1, \dots, v_{d+1} linealmente independentes. Se $q_i := [v_i]$, entón $L = q_1 \vee \dots \vee q_{d+1}$. Sexa $p = [x] \in \mathbb{P}$. Sexa $M_{v,u}$ a matriz $(n+1) \times (d+1)$ a matriz que ten por columnas as coordenadas proxectivas de v_1, \dots, v_{d+1} , isto é, as compoñentes dos vectores v_1, \dots, v_{d+1} na base \mathcal{B}_u . Como v_1, \dots, v_{d+1} son linealmente independentes, $M_{v,u}$ ten rango máximo $d+1$.

Temos entón que $p \in L$ se, e soamente se, existe unha matriz non nula Y , de dimensión $(d+1) \times 1$, e tal que $X = M_{v,u}Y$. Porén, o vector $Y = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1})$ depende da elección de representantes, que poden variar ao multiplicarmos por un escalar non nulo. Non ten sentido entón dicir $p = [x] \in L$ se, e soamente se, $[X] = [M_{v,u}[Y]]$, porque Y non define un elemento do proxectivo.

De xeito similar, podemos obter as ecuacións implícitas. Por simplicidade, supoñamos que o menor formado polas primeiras $d+1$ filas é non nulo. Entón, $p \in L$ se, e soamente se o rango de $(M_{v,u} \mid X)$ coincide co de $M_{v,u}$ e é $d+1$.

Ecuacións afíns e proxectivas

Sexa \mathbb{A} un espazo afín e $\mathbb{R} = \{e_1, \dots, e_n; p\}$ unha referencia afín. Sexa $\bar{\mathbb{A}}$ a clausura proxectiva de \mathbb{A} , e collemos $\bar{p} = [e_{n+1}]$. Collemos $\bar{\mathcal{R}} = \{[e_1], \dots, [e_n], \bar{p}; [e_{n+1} + \dots + e_n]\}$ a referencia proxectiva asociada a \mathcal{R} . Sexa $L = p + F$ unha variedade lineal de \mathbb{A} e $\bar{L} = i(L) \cup L_\infty$ a clausura proxectiva de L . Sexa $q \in \mathbb{A}$ con coordenadas (x_1, \dots, x_n) en \mathcal{R} . Supoñamos que as ecuacións de L en \mathcal{R} veñen dadas por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n+1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,n+1} & b_r \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, un vector $v = x_1e_1 + \dots + x_n e_n \in E$ cumpre que $v \in F$ se, e soamente se,

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,n+1} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.5.3. Sexa $Q \in \bar{\mathbb{A}}$ de coordenadas proxectivas $[(x_1, \dots, x_{n+1})]$ en $\bar{\mathcal{R}}$. Entón $Q \in \bar{L}$ se, e soamente se, $Q \in i(L)$ ou $Q \in L_\infty = [F]$.

Demostración. No caso no que $Q \in i(L)$ tense que $Q = \bar{q}$, con $q \in L$. Nese caso, $x_{n+1} \neq 0$, polo que $[(x_1, \dots, x_{n+1})] = [(x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1}, 1)]$ e q en \mathcal{R} ten coordenadas $(x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1})$. Iso quere dicir que

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n+1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,n+1} & b_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, se $Q \in [F]$, tense que $Q = [v]$, ou o que é o mesmo, que $x_{n+1} = 0$. Nese caso, tamén se cumpren as ecuacións do sistema. \square

Exemplo. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, consideramos as rectas con ecuacións implícitas

$$r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0, \end{cases} \quad s: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z - 3 = 0. \end{cases}$$

Para calcular a intersección das dúas rectas, impomos que se cumpran simultaneamente as catro ecuacións, e chegamos a que o único punto en común é o $(1, 2, 3)$. Para achar o subespazo director de cada unha, chega con calcular os xeradores correspondentes ao sistema homoxéneo. Por exemplo, no caso de r consideramos

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0, \end{cases},$$

de onde chegamos a que $r: (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. De xeito similar, $s: (1, 2, 3) + \mu(1, -1, 0)$, con $\mu \in \mathbb{R}$. A suma das dúas variedades lineais é o plano

$$\pi = r \vee s = (1, 2, 3) + \nu_1(1, 1, 1) + \nu_2(1, -1, 0), \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R},$$

o que é consistente coa fórmula de Grassmann, que como a intersección é non baleira dá a igualdade $2 + 0 = 1 + 1$.

A variedade lineal proxectiva correspondente á clausura de r obtense, como discutimos nos resultados anterior, ao tomar a variedade lineal obtida como $[(1, 2, 3, 1)] \vee [1, 1, 1, 0]$ (isto é, a inclusión no proxectivo dun punto máis o punto do infinito correspondente á dirección da recta). En forma matricial, as ecuacións de r son

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que quere dicir que as ecuacións da clausura proxectiva son

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, consideramos as rectas con ecuacións implícitas

$$r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0, \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Para calcular a intersección das dúas rectas, impomos que se cumpran simultaneamente as catro ecuacións, e chegamos a que non hai ningún punto en común. Para achar o subespazo director de cada unha, chega con calcular os xeradores correspondentes ao sistema homoxéneo. Tense que $r: (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s: (0, 0, 0) + \mu(1, 1, 1)$, con $\mu \in \mathbb{R}$. Polo tanto, as rectas son paralelas. A suma das dúas variedades lineais é o plano

$$\pi = r \vee s = (0, 0, 0) + \nu_1(1, 1, 1) + \nu_2(1, 2, 3), \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R},$$

onde ademais do vector director se engadiu o correspondente á resta dos puntos $(1, 2, 3)$ e $(0, 0, 0)$. O resultado é consistente coa fórmula de Grassmann, que como a intersección é baleira dá a igualdade $2 + 1 = 1 + 1 + 1$.

Ao considerar a clausura proxectiva, temos as rectas

$$\bar{r}: \begin{cases} x - y + t = 0 \\ x - z + 2t = 0, \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

A súa intersección é o punto $[(1, 1, 1, 0)]$. Se collemos como recta do infinito $x = 0$, temos que as ecuacións afíns no espazo resultante ao quitar esa recta (pondo $x = 1$) si terán un punto en común, o $(1, 1, 0)$. É dicir, que dúas rectas paralelas quere dicir que o seu punto de corte está no hiperplano do infinito. Se tomamos a clausura proxectiva e cambiamos o hiperplano do infinito, o punto de corte pode pasar a estar no espazo afín resultante.

Unha observación que resulta interesante de cara a resultados que desenvolveremos no futuro é o seguinte. No plano afín $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, unha recta pódese expresar mediante unha ecuación da forma

$$ax + by + cz = 0,$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Os coeficientes (a, b, c) e (a', b', c') correspóndense coa mesma recta se, e soamente se, existe $\lambda \neq 0$ de xeito que $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$. É dicir, dar unha recta equivale a dar un elemento de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Isto é un primeiro exemplo da *dualidade* proxectiva, que permite establecer máis en xeral unha correspondencia entre puntos e hiperplanos. No caso afín a situación é lixeiramente distinta: unha recta exprésase como

$$ax + by + c = 0,$$

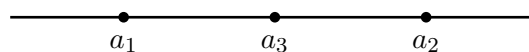
con $(a, b) \neq (0, 0)$. Os coeficientes (a, b, c) e (a', b', c') correspóndense coa mesma recta se, e soamente se, existe $\lambda \neq 0$ de xeito que $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$; aquí, porén, estamos excluindo o caso de $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, que se corresponde coa recta do infinito. Non hai polo tanto a dualidade que se observaba no proxectivo: os puntos identifícanse con \mathbb{R}^2 , mentres que as rectas o fan co proxectivizado de \mathbb{R}^3 menos un punto.

1.6. A razón simple e a razón dobre

A razón simple

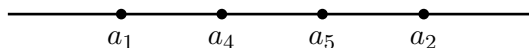
Definición 1.6.1. Sexa \mathbb{A} un espazo afín e $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{A}$ puntos aliñados con $a_1 \neq a_2$. Diremos que $\lambda = (a_1, a_2, a_3) \in K$ é a *razón simple* dos tres puntos se $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 = \lambda \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$.

Exemplo. (a) Consideremos os puntos a_1, a_2 e a_3 onde a_3 é o punto medio de $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$.



Neste caso, $\lambda = \frac{1}{2}$.

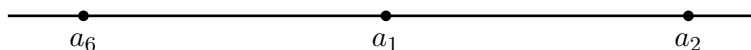
- (b) Consideremos os puntos a_1, a_2, a_4 e a_5 , onde a_4 e a_5 dividen o segmento a_1a_2 en tres partes iguais.



Neste caso, $(a_1, a_2, a_4) = \frac{1}{2}$ e $(a_1, a_2, a_5) = \frac{2}{3}$.

- (c) Consideremos tres puntos aliñados a_1, a_2 e a_3 . Se $a_3 = a_1$ entón $\lambda = 0$ e se $a_3 = a_2$ entón $\lambda = 1$.

- (d) Consideremos os puntos a_1, a_2 e a_6 tal e como se mostra na seguinte figura, onde a distancia entre a_1 e a_6 é a mesma que hai entre a_1 e a_2 .



Neste caso, $(a_1, a_2, a_6) = -1$.

Convén observar que se $a_1 \neq a_2$, $\{a_1, a_2\}$ é un sistema de referencia baricéntrico da recta $r = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathcal{R} = \{a_1; \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2\}$ é un sistema de referencia cartesiano de r . Entón, a razón simple λ é a coordenada de a_3 :

$$a_3 = a_1 + (a_1, a_2, a_3) \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2.$$

Por outro lado, se a_3 ten coordenadas baricéntricas (α, β) no sistema $\{a_1, a_2\}$, entón $(a_1, a_2, a_3) = \beta$. Máis en xeral, sexa $r = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ a recta xerada por estes tres puntos aliñados. Entón, se \mathcal{R} é un sistema de referencia de r tal que a_i ten coordenada $x_i \in K$, entón

$$(a_1, a_2, a_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Ademais, se $\{b_1, b_2\}$ é un sistema de referencia baricéntrico de r tal que $a_i = (\alpha_i, \beta_i)$ nese sistema, entón

$$(a_1, a_2, a_3) = \frac{\beta_3 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

A importancia da razón simple quedará clara no tema seguinte, cando se establecerá que as afinidades (as aplicacións que manteñen a estrutura de espazo afín) conservan a razón simple, e que nun sentido apropiado, o recíproco tamén é certo. Desta maneira, pódese entender a razón simple como unha maneira de capturar un invariante dos espazos afíns.

A razón dobre

A razón simple é un concepto que non está ben definido desde o punto de vista do espazo proxectivo. Para amosalo, sexa $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ a recta afín real e consideremos os puntos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Podemos considerar a completación proxectiva, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, de xeito que o punto do infinito ten coordenadas $[1 : 0]$ e un punto afín r ten coordenadas $[r : 1]$. Imos considerar agora a estrutura de espazo afín en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ que se obtén ao eliminar un hiperplano (neste caso, un punto) diferente do $[1 : 0]$. Eliminar o punto r corresponde a eliminar o hiperplano $x - ry = 0$. Como o $[1 : 0]$ é un complementario, un punto xenérico $[a : b]$ pode escribirse como

$$[(a, b)] = [(1, 0) + (ru, u)],$$

con $u = \frac{b}{a-rb}$. En particular, ao punto $x_1 = 0$ correspóndelle $u = -1/r$ e ao punto $x_2 = 1$ correspóndelle $u = 1/(1-r)$. O vector $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ é entón o $\left(\frac{1}{1-r}, \frac{1}{r(1-r)}\right)$. Con isto, temos que o punto medio do segmento que une x_1 e x_2 ten coordenadas $\left(\frac{2r-1}{2(1-r)}, \frac{2r-1}{2r(1-r)}\right)$. A partir de aquí, obtemos que ese punto medio se corresponde co $\frac{r}{2r-1}$. No espazo afín, o punto medio x_3 dun segmento x_1x_2 é o único que cumpre que $(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}$. Neste caso, obsérvase que o punto medio depende da elección do punto do infinito, polo que non existe un punto x_3 para o cal teña sentido dicir que $(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}$, senón que isto dependerá da elección do punto do infinito.

En cambio, si ten sentido falar dun cociente de razóns simples. Sexa $q_1 = [0 : 1]$, $q_2 = [1 : 1]$, q_3 o punto do infinito $[r : 1]$ e q_4 o punto medio de q_1q_2 unha vez feita a elección de punto do infinito. Entón,

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) := \frac{(q_2, q_3, q_4)}{(q_1, q_3, q_4)} = -1;$$

é dicir, o cociente non depende da elección do punto do infinito.

Alternativamente, se consideramos que r é o punto do infinito e queremos calcular a razón simple de (x_1, x_2, x_3) , con $x_3 = 1/2$, obtemos que o resultado é

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{1-r}{1-2r},$$

isto é, depende da elección de r (observamos que cando r tende a infinito, o valor é precisamente $1/2$).

Para corrixir este problema, sexa \mathbb{P}^1 unha recta proxectiva, e sexa $\mathcal{R} = \{p_1, p_2; U\}$ unha referencia proxectiva. Collemos $\mathcal{B}_u = \{u_1, u_2\}$ unha base adaptada a \mathcal{R} . En particular, $p_1 = [u_1]$, $p_2 = [u_2]$ e $U = [u_1 + u_2]$. Por outro lado, sexan q_1, q_2, q_3, q_4 catro puntos de \mathbb{P}^1 , con polo menos tres deles diferentes. Supoñamos que $q_i = [v_i]$, onde $v_i = x_i u_1 + y_i u_2$. A modo de notación, poremos $\bar{K} := K \sqcup \{\infty\}$, onde ∞ é un símbolo que cumpre $\lambda + \infty = \infty$; $\lambda/\infty = 0$ e $\infty/\lambda = \infty$, se $\lambda \in K$; $\lambda \cdot \infty = \infty$ e $\lambda/0 = \infty$, se $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Definición 1.6.2. Consideramos as aplicacións $\theta: \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{K}$ e $\eta: \bar{K} \rightarrow \mathbb{P}^1$ definidas por

$$\theta(p) = \begin{cases} x/y & \text{se } p = [xu_1 + yu_2] \text{ con } y \neq 0, \\ \infty & \text{se } p = [u_1]; \end{cases}$$

$$\eta(\lambda) = \begin{cases} [\lambda u_1 + u_2] & \text{se } \lambda \in K, \\ [u_1] & \text{se } \lambda = \infty. \end{cases}$$

Lema 1.6.1. A aplicación $\theta: \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{K}$ está ben definida, é bixectiva e a súa inversa é $\eta: \bar{K} \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Demostración. Se $p = [xu_1 + yu_2] = [x'u_1 + y'u_2]$, entón $xu_1 + yu_2 = \lambda(x'u_1 + y'u_2)$ para algún $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Deste xeito, $x = \lambda x'$ e $y = \lambda y'$. En particular, $y = 0$ se, e soamente se, $y' = 0$, e, neste caso, $p = p_1$ e $\theta(p) = \infty$, que non depende do representante escollido. Se $y, y' \neq 0$, entón $x/y = (\lambda x')/(\lambda y') = x'/y'$ e $\theta(p)$ non depende novamente do representante escollido. É tamén evidente que η é a aplicación inversa de θ . \square

Definición 1.6.3. A razón dobre de q_1, q_2, q_3, q_4 é

$$(q_1, q_2; q_3, q_4) = \frac{(q_2, q_3, q_4)}{(q_1, q_3, q_4)} = \frac{\det(v_1, v_3) \det(v_2, v_4)}{\det(v_1, v_2) \det(v_2, v_3)} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}},$$

onde os determinantes se toman con respecto a unha base fixada $\mathcal{B}_u = \{u_1, u_2\}$.

Lema 1.6.2. A razón dobre $(q_1, q_2; q_3, q_4)$ é un elemento ben definido de \bar{K} e non depende nin dos representantes dos q_i nin da referencia escollida.

Demostración. Está claro que se $q_i = q_j$ entón $\det(v_i, v_j) = 0$. Como tres dos catro puntos son diferentes, como moito hai un determinante nulo. Se $q_i = [v_i] = [w_i]$, entón $w_i = \lambda_i v_i$ e

$$\begin{aligned} \frac{\det(w_1, w_3) \det(w_2, w_4)}{\det(w_1, w_4) \det(w_2, w_3)} &= \frac{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_4 \det(v_1, v_3) \det(v_2, v_4)}{\lambda_1 \lambda_4 \lambda_2 \lambda_3 \det(v_1, v_4) \det(v_2, v_3)} \\ &= \frac{\det(v_1, v_3) \det(v_2, v_4)}{\det(v_1, v_4) \det(v_2, v_3)}. \end{aligned}$$

Imos considerar agora outra referencia proxectiva $\mathcal{R}' = \{p'_1, p'_2; U'\}$, e sexa $\mathcal{B}'_u = \{u'_1, u'_2\}$ unha base adaptada a \mathcal{R}' . Sexa $M = (\mathbb{I})_{\mathcal{B}_u, \mathcal{B}'_u}$ a matriz de cambio de base de \mathcal{B}_u a \mathcal{B}'_u . Tense entón que $\det_{\mathcal{B}'_u}(v_i, v_j) = M \det_{\mathcal{B}_u}(v_i, v_j)$, polo que o cociente queda novamente invariante e a razón dobre non depende da referencia escollida. \square

Lema 1.6.3. Supoñamos que $\theta_i := \theta(q_i) = x_i/y_i \neq \infty$ na referencia $\mathcal{R} = \{p_1, p_2; U\}$. Entón

$$(q_1, q_2; q_3, q_4) = \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_4 - \theta_2)}{(\theta_4 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)}.$$

Demostración. Por hipótese, $q_i = [x_i u_1 + y_i u_2] = [\theta_i u_1 + u_2]$, con $y_i \neq 0$ e $\theta_i = x_i/y_i \neq 0$. Como a definición non depende do representante, temos que

$$(q_1, q_2; q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_3 & \theta_2 & \theta_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_4 & \theta_2 & \theta_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_4 - \theta_2)}{(\theta_4 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)}.$$

Como unicamente pode haber dous θ_i iguais, unicamente un dos $\theta_i - \theta_j$ pode ser 0. \square

Cúmrese que $(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A)$, mentres que se $(A, B; C, D)$ tense que

$$\begin{aligned} (A, B; D, C) &= \frac{1}{\lambda}, \\ (A, C; D, B) &= \frac{1}{1 - \lambda}, \\ (A, C; B, D) &= 1 - \lambda, \\ (A, D; C, B) &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \\ (A, D; B, C) &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \end{aligned}$$

Corolario 1.6.1. Sexan $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^1$, con polo menos tres deles diferentes, e sexa $\rho = (q_1, q_2; q_3, q_4)$.

- (a) $\rho = 0$ se, e soamente se, $q_1 = q_3$ ou $q_2 = q_4$; $\rho = \infty$ se, e soamente se, $q_1 = q_4$ ou $q_2 = q_3$; e $\rho = 1$ se, e soamente se, $q_1 = q_2$ ou $q_3 = q_4$.
- (b) Se $q_1 \neq q_2$ e $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; U\}$, entón $\rho = \theta_4/\theta_3$.

- (c) Se q_1, q_2, q_3 son diferentes e $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; q_3\}$, entón $\rho = \theta_4$.
- (d) Se q_1, q_2, q_3 son diferentes e u_1, u_2 é unha base adaptada a $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; q_3\}$, entón $q_4 = q_1$ se, e soamente se, $\rho = \infty$. En caso contrario, $q_4 \neq q_1$, $\rho \in K$ e $q_4 = [\rho u_1 + u_2]$.
- (e) Se $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \in \mathbb{P}^1$ con $q_1 \neq q_2$ e $q_3, q_4, q_5 \notin \{q_1, q_2\}$, entón

$$(q_1, q_2; q_3, q_4)(q_1, q_2; q_4, q_5) = (q_1, q_2; q_3, q_5).$$

Demostración. (a) Temos que $\rho = 1$ se, e soamente se $(\theta_3 - \theta_1)(\theta_4 - \theta_2) = (\theta_4 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)$. Operando e simplificando termos, a igualdade é equivalente a $(\theta_2 - \theta_1)(\theta_4 - \theta_3) = 0$, é dicir, a $q_1 = q_2$ ou a $q_3 = q_4$. As outras dúas afirmacións son obvias.

- (b) Na referencia $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; U\}$, q_1 ten coordenadas $(1 : 0)$ e coordenada absoluta $\theta_1 = \infty$; q_2 ten coordenadas $(0, 1)$ e coordenada absoluta $\theta_2 = 0$. Se $q_3, q_4 \neq q_1$, entón $\theta_3, \theta_4 \neq \infty$, e aplicando o resultado anterior tense que

$$(q_1, q_2; q_3, q_4) = \frac{\theta_4 - \theta_2}{\theta_3 - \theta_2} = \frac{\theta_4}{\theta_3}.$$

Se $q_3 = q_1 \neq q_4$, da definición de razón dobre obtemos que $(q_1, q_2; q_3, q_4) = 0$. Por outro lado, como $q_4 \neq q_1$, entón $\theta_4 \neq \theta_1 = \theta_3 = \infty$ e $\theta_4/\theta_3 = 0$. Se $q_4 = q_1 \neq q_3$, entón $(q_1, q_2; q_3, q_4) = \infty$, e como $q_3 \neq q_1$, entón $\theta_3 \neq \theta_1 = \theta_4 = \infty$ e $\theta_4/\theta_3 = 0$.

- (c) Isto séguese inmediatamente de (b) e do feito que se $U = q_3$, entón $\theta_3 = 1$.
- (d) Pomos $q_1 = [u_1]$, $q_2 = [u_2]$ e $q_3 = [u_1 + u_2]$. Do apartado anterior, temos que $\rho = \theta_4$. Como θ é bixectiva e a súa inversa é η , tense que $q_4 = q_1$ se, e soamente se, $\theta(q_4) = \theta(q_1)$, o que ocorre se, e soamente se, $\theta_4 = \rho = \infty$. En caso contrario, $q_4 \neq q_1$, $\theta_4 \neq \infty$ e $q_4 = \eta(\theta(q_4)) = \eta(\theta_4) = [\theta_4 u_1 + u_2] = [\rho u_1 + u_2]$.
- (e) Coas hipóteses que se supoñen, tódalas razóns sobre están ben definidas. Collendo $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; U\}$, deducimos que $(q_1, q_2; q_i, q_j) = \theta_j/\theta_i$, onde $q_i \neq q_j$ xa que $q_i, q_j \notin \{q_1, q_2\}$. Deste xeito

$$(q_1, q_2; q_3, q_4)(q_1, q_2; q_4, q_5) = \frac{\theta_4 \theta_5}{\theta_3 \theta_4} = \frac{\theta_5}{\theta_3} = (q_1, q_2; q_3, q_5).$$

□

Exemplo. En $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ consideramos a recta $x + y + z = 0$ e os puntos $q_1 = [1 : -1 : 0]$, $q_2 = [1 : 0 : -1]$, $q_3 = [0 : 1 : -1]$ e $q_4 = [3 : -2 : -1]$. Para calcular a razón dobre $(q_1, q_2; q_3, q_4)$. Collemos entón un sistema de referencia da recta $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; U\}$, de xeito que $q_1 = [(1, -1, 0)]$ e $q_2 = [(1, 0, -1)]$. Podemos pór $q_3 = [-1 \cdot (1, -1, 0) + 1 \cdot (1, 0, -1)]$, polo que a coordenada absoluta é $\theta_3 = -1$. Análogamente, $q_4 = [2 \cdot (1, -1, 0) + (1, 0, -1)]$, polo que $\theta_4 = 2$. Isto amosa que $(q_1, q_2; q_3, q_4) = -2$.

Alternativamente, podemos considerar unha base adaptada de xeito que q_3 sexa o punto unidade. Para iso pomos $q_1 = [(-1, 1, 0)]$, $q_2 = [(1, 0, -1)]$ e $q_3 = [(0, 1, -1)]$. Entón, neste caso temos que $q_4 = [-2(-1, 1, 0) + (1, 0, -1)]$, polo que a razón simple é directamente a coordenada absoluta, é dicir, -2 .

Polo tanto, para calcular a razón dobre podemos considerar unha referencia na que os dous puntos sexan q_1 e q_2 , e logo facer o cociente das coordenadas absolutas de q_3 e q_4 ; se adicionalmente impomos que q_3 sexa o punto unidade, entón é suficiente calcular a coordenada absoluta do cuarto punto.

Definición 1.6.4. Sexan q_1, q_2, q_3, q_4 catro puntos de \mathbb{P}^1 , con polo menos tres deles diferentes. Dicimos que q_1, q_2, q_3, q_4 forman unha *cuaterna harmónica* se $(q_1, q_2; q_3, q_4) = -1$.

No caso de que os puntos formen unha cuaterna harmónica, calquera outra forma de colocar os puntos dá como valor para a razón dobre 2 ou $1/2$. Se $(q_1, q_2; q_3, q_4) = -1$, ás veces dise que (q_1, q_2) dividen harmónicamente (q_3, q_4) .

Se V é unha recta afín, a clausura proxectiva pode escribirse como $\bar{V} = \iota(V) \cup V_\infty$, onde V_∞ consta unicamente dun punto. Neste caso, $(A, B, C) = (\iota(A), \iota(B), \iota(C), \infty)$, onde por simplicidade usamos ∞ para referirnos ao punto do infinito. En particular, $(\iota(A), \iota(B), \iota(C), \infty)$ forman unha cuaterna harmónica se, e soamente se, C é o punto medio de AB .

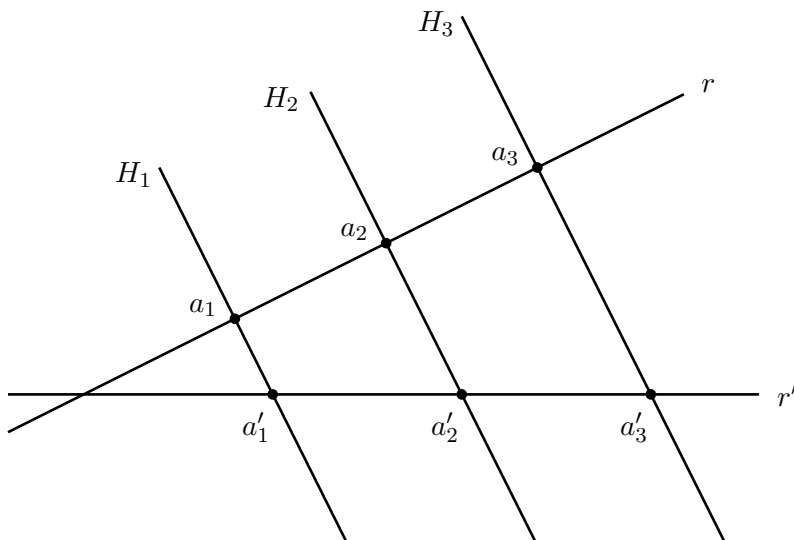
1.7. Algúns teoremas da xeometría plana clásica

Algúns dos resultados da xeometría clásica do plano exprésanse de xeito natural en termos da razón simple. Presentamos como exemplos os teoremas de Ceva, Menelao, Pappus e Desargues; porén, este último demostrámolo na linguaxe da xeometría proxectiva.

En primeiro lugar comezamos discutindo un dos teoremas máis coñecidos da xeometría clásica, válido para calquera espazo afín; xeralmente atribúese ao filósofo e matemático grego Thales de Mileto.

Teorema 1.7.1 (Thales). Sexan r e r' dúas rectas dun espazo afín \mathbb{A} e H_1, H_2 e H_3 tres hiperplanos diferentes, paralelos entre si e non paralelos a ningunha das rectas. Sexan $a_i = r \cap H_i$ e $a'_i = r' \cap H_i$. Entón,

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3).$$



Demostración. Sexa $n = \dim \mathbb{A}$. Comezamos observando que a intersección dun hiperplano e dunha recta que non sexa paralela a el é non baleira; ademais $\dim H_i \cap r = 0$ e que $\dim H_i \cap r' = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Para ver isto, aplicamos a fórmula de Grassmann e obtemos

$$\dim H_i \cap r = \dim(H_i \vee r) - \dim H_i - \dim r = n - (n - 1) - 1 = 0,$$

e o mesmo é certo para $\dim H_i \cap r'$. Sexa $\lambda = (a_1, a_2, a_3)$. Iso quere dicir que $a_3 = a_1 + \lambda \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$. Definimos o punto $b'_3 = b_1 + \lambda \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2$; é suficiente entón establecer que $b'_3 = b_3$. Sexa F o subespazo director de calquera dos hiperplanos. Temos que

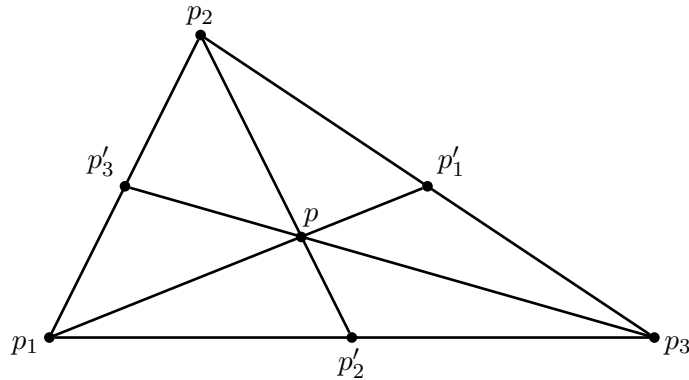
$$b'_3 - a_3 = (1 - \lambda) \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 \in F,$$

o que quere dicir que $b'_3 \in a_3 + F = H_3$, pero ao mesmo tempo $b'_3 \in r'$. Polo tanto $b'_3 \in r' \cap H_3$, e como esa intersección consta unicamente do punto b_3 , tense que cumprir que $b'_3 = b_3$, como queriamos ver. \square

O seguinte resultado, coñecido como teorema de Ceva, dá unha condición necesaria e suficiente para que tres rectas sexan concorrentes.

Teorema 1.7.2 (Ceva). Sexa $p_1 p_2 p_3$ un triángulo nun plano afín \mathbb{A} . Consideramos puntos $p'_i \in p_j p_k$ (con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) de xeito que non coincidan con ningún dos vértices do triángulo e definimos as rectas $r_i = p_i p'_i$. Entón, r_1, r_2 e r_3 son concorrentes se, e soamente se,

$$(p'_1, p_2, p_3)(p'_2, p_3, p_1)(p'_3, p_1, p_2) = -1.$$



Demostración. Os puntos p_1, p_2 e p_3 forman un sistema de coordenadas baricéntricas no plano. Supoñamos primeiro que as rectas son concorrentes nun punto $p = ap_1 + bp_2 + cp_3$, con $a + b + c = 1$. O punto p'_1 ten coordenadas (a_1, b_1, c_1) . Por estar na recta $p_2 p_3$ cumpre que $a_1 = 0$; do mesmo xeito, está tamén na recta $p p_1$, polo que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & b_1 \\ 0 & c & c_1 \end{vmatrix} = bc_1 - cb_1 = 0.$$

Como ademais $b_1 + c_1 = 1$, temos que as coordenadas de p'_1 son $\left(0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c}\right)$. Análogamente, as de p'_2 son $\left(\frac{a}{a+c}, 0, \frac{c}{a+c}\right)$ e as de p'_3 , $\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}, 0\right)$. Temos entón que

$$(p'_1, p_2, p_3) = \frac{-b}{c}, \quad (p'_2, p_3, p_1) = \frac{-c}{a}, \quad (p'_3, p_1, p_2) = \frac{-a}{b},$$

polo que o produto das tres razóns simples é -1 .

Para demostrar o recíproco, supoñemos que se cumpre que o produto de razóns simples é -1 . Sexa p o punto de corte de $p_1p'_1$ e $p_2p'_2$, e consideramos un novo punto p''_3 , definido como a intersección de p_3p e p_1p_2 . Polo visto na parte anterior, cúmprese que

$$(p'_1, p_2, p_3)(p'_2, p_3, p_1)(p''_3, p_1, p_2) = -1,$$

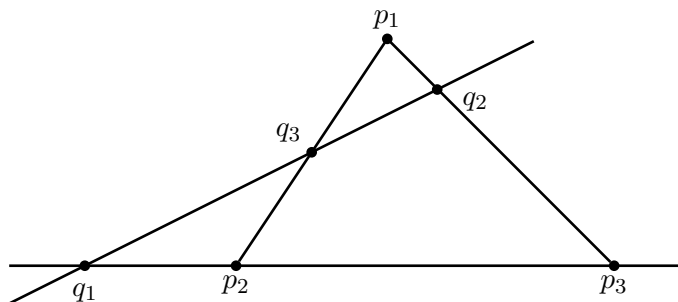
polo que $(p'_3, p_1, p_2) = (p''_3, p_1, p_2)$. Iso quere dicir que $p_3 = p''_3$. \square

Exemplo. Nun triángulo, consideramos as rectas que unen os vértices cos puntos medios do lado oposto (as chamadas *medianas*). Estas rectas concorren nun punto, que é de feito o baricentro do triángulo. Para demostralo, se chamamos A , B e C aos vértices e M_A , M_B e M_C aos puntos medios correspondentes, temos que $(M_A, B, C) = (M_B, C, A) = (M_C, A, B) = -1$.

O seguinte resultado, atribuído a Menelao, pódese entender como un resultado dual do anterior, nun resultado preciso que se aclarará máis adiante.

Teorema 1.7.3 (Menelao). Sexan p_1 , p_2 e p_3 tres puntos independentes dun plano afín \mathbb{A} que determinan un triángulo, e sexan $q_i \in p_jp_k$ (con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$), de xeito que os p_i non coincidan con ningún vértice. Entón, q_1 , q_2 e q_3 están aliñados se, e soamente se,

$$(q_3, p_1, p_2)(q_1, p_2, p_3)(q_2, p_3, p_1) = 1.$$



Demostración. Como no teorema de Ceva, consideramos o sistema de referencia baricéntrico formado por p_1 , p_2 e p_3 . Entón, temos que neste sistema podemos pór $q_1 = (0, b_1, c_1)$, $q_2 = (a_2, 0, c_2)$ e $q_3 = (a_3, b_3, 0)$. Entón,

$$(q_3, p_1, p_2)(q_1, p_2, p_3)(q_2, p_3, p_1) = -\frac{a_3b_1c_2}{a_2b_3c_1}.$$

Esa cantidade é igual a 1 se, e soamente se, $a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 = 0$. Do mesmo xeito, os tres puntos están aliñados se, e soamente se,

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

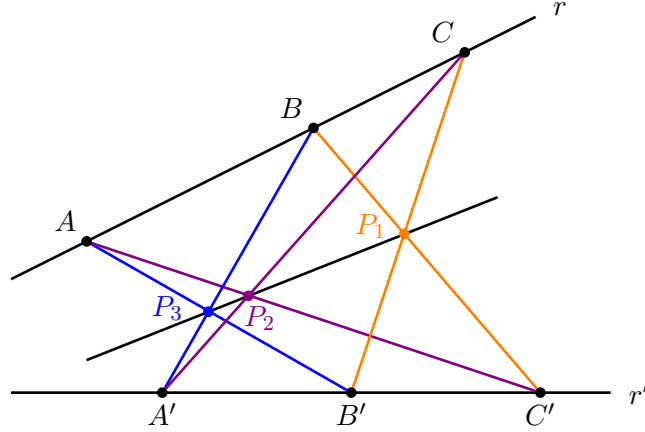
\square

Os teoremas de Ceva e Menelao tamén admiten enunciados en termos de xeometría proxectiva, pero son teoremas fundamentalmente afíns, xa que tratan de razóns simples. Imos agora enunciar a versión afín do teorema de Pappus, que suxire a necesidade de introducir o marco da xeometría proxectiva.

Teorema 1.7.4 (Pappus). Sexan r e r' dúas rectas dun plano afín que se cortan nun punto O . Sexan $A, B, C \in r$ e $A', B', C' \in r'$ puntos diferentes e que non coinciden con O . Consideremos os puntos

$$P_3 = AB' \cap A'B, \quad P_2 = AC' \cap A'C, \quad P_1 = BC' \cap B'C,$$

onde se supón que ningunha das rectas usadas nas definicións dos puntos son paralelas. Entón P_1, P_2 e P_3 están aliñados.



Demostración. Pomos $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$ e $A' = (0, a')$, $B' = (0, b')$, $C' = (0, c')$. Entón

$$P_1 = \left(\frac{bc(c' - b')}{cc' - bb'}, \frac{b'c'(c - b)}{cc' - bb'} \right) = (x_1, y_1),$$

$$P_2 = \left(\frac{ca(a' - c')}{aa' - cc'}, \frac{c'a'(a - c)}{aa' - cc'} \right) = (x_2, y_2),$$

$$P_3 = \left(\frac{ab(b' - a')}{bb' - aa'}, \frac{a'b'(b - a)}{bb' - aa'} \right) = (x_3, y_3),$$

e facendo o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

vemos que o valor é cero e que os tres puntos pertencen á mesma recta (porén, o cálculo do determinante é bastante longo, de aí que este acercamento non sexa o máis recomendable). \square

Alternativamente, é posible dar unha proba do teorema de Pappus empregando o teorema de Menelao.

Demostración. Sexa $P = A'B \cap AC'$, $Q = A'B \cap B'C$ e $R = AC' \cap B'C$. Aplicamos agora o teorema de Menelao no triángulo PQR coas ternas de puntos (P_1, B, C') , (P_2, A', C) , (P_3, A, B') , (A, B, C) e (A', B', C') ; é dicir, $(B, P, Q)(P_1, Q, R)(C', R, P) = 1$ e analogamente para as outras 4:

$$\begin{aligned} (B, P, Q)(P_1, Q, R)(C', R, P) &= 1 \\ (A', P, Q)(C, Q, R)(P_2, R, P) &= 1 \\ (P_3, P, Q)(B', Q, R)(A, R, P) &= 1 \\ (B, P, Q)(C, Q, R)(A, R, P) &= 1 \\ (A', P, Q)(B', Q, R)(C', R, P) &= 1. \end{aligned}$$

Multiplicando as tres primeiras igualdades e dividindo polo produto da cuarta e da quinta, obtemos que

$$(P_1, Q, R)(P_2, R, P)(P_3, P, Q) = 1,$$

o que demostra que P_1 , P_2 e P_3 están aliñados. \square

Neste caso, a versión proxectiva do teorema permite eliminar a condición de que as rectas se corten, porque ese sempre será o caso (se son paralelas desde un punto de vista afín, cortaríanse nun punto da recta do infinito). Non só iso: un dos problemas ao enunciarse o teorema de Pappus é que as rectas AB' e $A'B$ poden ser paralelas, polo que hai que supor que non o son. Ao traballarmos no contexto proxectivo, nese caso o que sucederá é que o punto de corte estará na recta do infinito, e iso non afectará ao modo de proceder.

Teorema 1.7.5 (Pappus, versión proxectiva). Sexan r e r' dúas rectas diferentes dun plano proxectivo. Sexan $A, B, C \in r$ e $A', B', C' \in r'$ puntos diferentes de xeito que non pertencen a $r \cap r'$. Consideremos os puntos

$$P_3 = AB' \cap A'B, \quad P_2 = AC' \cap A'C, \quad P_1 = BC' \cap B'C.$$

Entón P_1 , P_2 e P_3 están aliñados.

Demostración. Sexa $\{A, B, A'; B'\}$ unha referencia proxectiva. A recta r ten ecuación $z = 0$, e a recta r' , $x = y$. Polo tanto, o punto C pódese escribir como $[a : 1 : 0]$, con $a \neq 0$, e o punto C' como $[b : b : 1]$, con $b \neq 1$. A recta AB' ten ecuación $y = z$, e a recta BA' , $x = 0$. Polo tanto, $P_3 = [0 : 1 : 1]$. A recta AC' ten ecuación $y - bz = 0$ e a recta CA' , $x - ay = 0$. Entón, $P_2 = [ab : b : 1]$. Por outro lado, a recta BC' ten ecuación $x - bz = 0$ e a recta CB' , $-x + ay + (1 - a)z = 0$. As coordenadas de P_1 son $[ab : a + b - 1 : a]$. Entón, chega con ver que o determinante que ten por columnas as coordenadas dos tres puntos é 0:

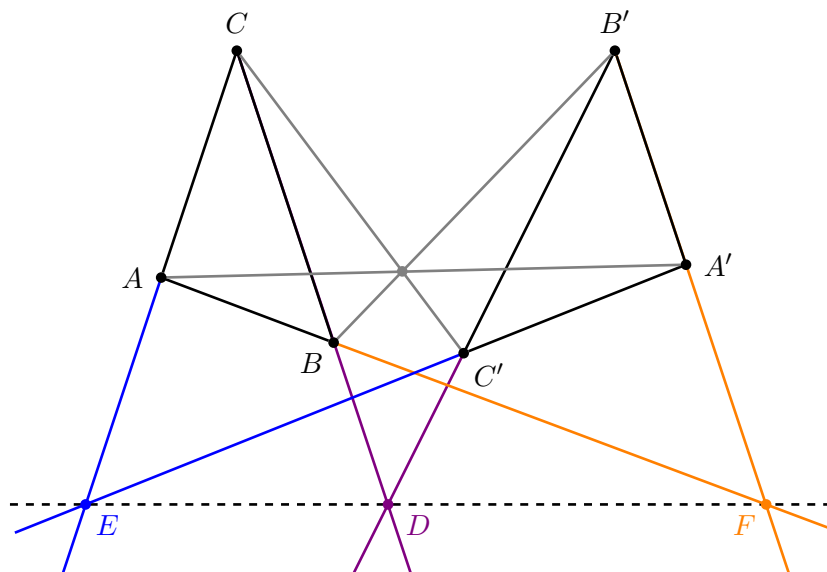
$$\begin{vmatrix} 0 & ab & ab \\ 1 & b & a + b - 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = ab(a + b - 1 + 1 - b - a) = 0.$$

\square

Ao estudarmos as cónicas, veremos que o teorema de Pappus segue a ser certo cando en lugar de considerar que os puntos están sobre dúas rectas os tomamos sobre unha *cónica* (como por exemplo, unha circunferencia ou unha elipse). Será o chamado *teorema de Pascal*.

Imos pasar finalmente a discutir o teorema de Desargues, que tamén podemos formular no contexto afín, pero que é máis natural desde o punto de vista da xeometría proxectiva.

Teorema 1.7.6 (Desargues). Sexan ABC e $A'B'C'$ dous triángulos dun plano proxectivo \mathbb{P} . Supoñamos que $A \neq A'$, $B \neq B'$ e $C \neq C'$; supoñamos tamén que $AB \neq A'B'$, $BC \neq B'C'$ e $CA \neq C'A'$. Se as rectas AA' , BB' e CC' son concorrentes, entón os puntos $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$ e $AB \cap A'B'$ están aliñados.



Demostración. Temos $A = [u]$, $B = [v]$, $C = [w]$, $A' = [u']$, $B' = [v']$ e $C' = [w']$, onde u, v, w, u', v', w' son elementos non nulos de E . Como $A \neq A'$, $B \neq B'$ e $C \neq C'$, entón u e u' son linealmente independentes, e o mesmo para o par v e v' e para o par w e w' . En termos de subespazos vectoriais, podemos escribir $AA' = [\langle u, u' \rangle]$, $BB' = [\langle v, v' \rangle]$ e $CC' = [\langle w, w' \rangle]$. Como son concorrentes, existe un punto $P = [x]$ na súa intersección, é dicir

$$x = \alpha u + \alpha' u' = \beta v + \beta' v' = \gamma w + \gamma' w',$$

para $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in K$. En particular, $\alpha u - \beta v = \beta' v' - \alpha' u'$. Observamos que $\alpha u - \beta v \neq 0$, xa que se fose cero, u e v serían linealmente independentes e $A = B$, que non pode ser xa que ABC é un triángulo. Deste xeito, $F = [\alpha u - \beta v] = [\beta' v' - \alpha' u']$ é un punto de \mathbb{P} . Ademais, $F \in AB \cap A'B'$. Como AB e $A'B'$ son rectas diferentes, entón $F = AB \cap A'B'$. De xeito análogo, podemos definir $D = [\beta v - \gamma w] = BC \cap B'C'$ e $E = [\gamma w - \alpha u] = CA \cap C'A'$. Como

$$(\alpha u - \beta v) + (\beta v - \gamma w) + (\gamma w - \alpha u) = 0,$$

os tres vectores son linealmente dependentes e, polo tanto, os puntos D , E e F están aliñados. \square

A proba anterior pódese realizar tamén empregando coordenadas. Nese caso, hai que distinguir dous casos, segundo P coincida con algún dos puntos A, B, C, A', B' ou C' ou non. Cando non coincide, cóllese $\mathcal{R} = \{A, B, C; P\}$ como referencia proxectiva e calcúlanse as ecuacións de cada unha das rectas, comprobando que os puntos de corte son linealmente dependentes e polo tanto están aliñados.

1.8. Planos afíns e proxectivos axiomáticos

Nesta última parte do capítulo ímonos centrar no caso do plano e presentar unhas definicións diferentes do plano afín e do plano proxectivo, que xeralmente se coñecen como *plano afín axiomático* e *plano proxectivo axiomático*. Comprobaremos que as definicións alxébricas cumpren estas propiedades, pero que en cambio o recíproco non é certo. Se quixésemos desenvolver a xeometría do plano desde este punto de vista, sería preciso impor que se cumpren o teorema de Desargues e o teorema de Pappus.

Definición 1.8.1. Un *plano afín axiomático* é un conxunto de puntos S e liñas L que cumpren as seguintes propiedades:

- (PA1) Dous puntos calquera atópanse nunha única liña.
- (PA2) Dado un punto $P \in S$ e unha liña $l \in L$ con $P \notin l$, existe unha única liña $m \in L$ con $P \in m$ e $m \cap l = \emptyset$.
- (PA3) Existen tres puntos non aliñados.

Proposición 1.8.1. Sexa K un corpo e consideramos o espazo afín \mathbb{A}_K^2 . Nese caso, cúmprense os axiomas (PA1)-(PA3).

Demostración. Consideramos o espazo afín \mathbb{A}_K^2 , é dicir, a terna $(\mathbb{A}, K^2, \delta)$, onde δ é unha aplicación $\delta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow K^2$ tal que:

1. $\delta(p, q) + \delta(q, r) = \delta(p, r)$.
2. A aplicación $\delta_p : \mathbb{A} \rightarrow K^2$, definida como $\delta_p(q) = \delta(p, q)$, é bixectiva.

Como é habitual, denotaremos $\delta(p, q)$, elemento de K^2 , como \mathbf{pq} . Vexamos logo que se verifican os tres axiomas.

Para (PA1), dados dous puntos p, q de \mathbb{A}_K^2 , basta considerar a recta (variedade lineal afín de dimensión 1) $V = p + \langle \mathbf{pq} \rangle$. Os dous puntos atópanse nesta recta e para ver que é única, supoñamos que existe outra recta V' contendo p, q . Nese caso, poderíamos expresar $V' = p + \langle v \rangle$. Como $q \in V'$, $\mathbf{pq} \in \langle v \rangle$, é dicir, $\mathbf{pq} = \lambda v$ para certo $\lambda \in K$ e $V = V'$.

Pasamos agora ao segundo axioma (PA2): dado un punto $p \in \mathbb{A}_K^2$ e unha recta $V = q + \langle v \rangle$ con $p \notin V$, existe unha única recta W con $p \in W$ e $W \cap V = \emptyset$. Para ver a existencia, podemos considerar a recta $W = p + \langle w \rangle$, que verifica $p \in W$ e $V \cap W = \emptyset$, xa que se existise $r \in V \cap W$, teríamos que tanto \mathbf{pr} como \mathbf{qr} estarían en $\langle v \rangle$, logo $p = q + \mathbf{qr} - \mathbf{pr} \in V$, o que é unha contradición. Probemos a unicidade supoñendo que existe outra recta $W' = p + \langle w \rangle$, cumprindo as condicións anteriores. Como W e W' coinciden nun punto (en p) pero son distintas rectas, temos que w e v son linealmente independentes. Por outra banda, como a intersección entre V e W' é baleira, o vector $\mathbf{pq} \notin \langle w \rangle + \langle v \rangle = \langle v, w \rangle$. Porén, como v e w son dous vectores linealmente independentes nun espazo de dimensión dous son unha base de K^2 . Chegamos a unha contradición que nos mostra que a recta V anterior é única.

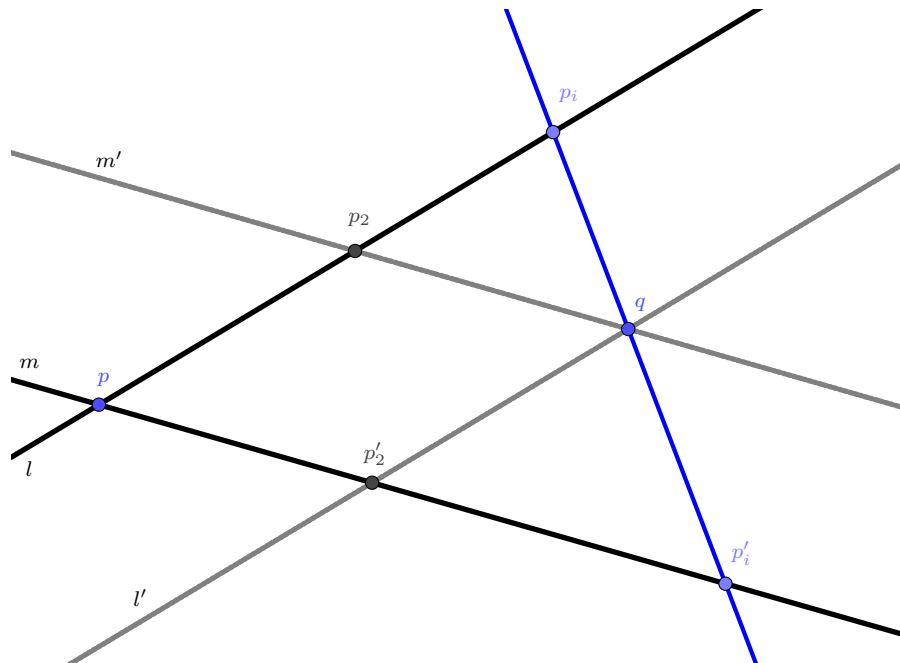
Para probar (PA3), consideramos un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{v_1, v_2; p\}$, sendo $\{v_1, v_2\}$ unha base de K^2 . Neste caso, os puntos $p, p + v_1$ e $p + v_2$ non están aliñados. En efecto, se existise unha recta $V = p + \langle v \rangle$ contendo estes tres puntos, teríamos que $v_1 \in \langle v \rangle$ e $v_2 \in \langle v \rangle$, o que contradiría a súa independencia. \square

No caso dos planos afíns axiomáticos, podemos definir unha noción de *orde* do seguinte xeito.

Proposición 1.8.2. Supoñamos que S é un conxunto finito. Demostrar que cada liña é incidente cun número constante de puntos, n , e que cada punto é incidente con $n + 1$ liñas. A este valor de n chamámoslle a *orde* do plano afín.

Demostración. Sexan l, m dúas liñas de L . Supoñamos que l é incidente con n puntos e vexamos que m tamén é incidente con n puntos.

Se l e m non son paralelas, entón crúzanse nun punto p . Consideramos agora un punto q que non estea en l nin en m . Por (PA2), existe unha única liña l' paralela a l e incidente con q que corta m nun punto p'_2 . Análogamente, existe unha única liña m' pasando por q que ten intersección baleira con m e corta l nun punto p_2 . A continuación, consideramos $p_i \in l$ con $p_i \neq p$, $p_i \neq p_2$. A recta $l_{p_i,q}$ pasando por p_i e q interseca m nun único punto p'_i . Consideramos a aplicación $f : l \rightarrow m$, definida como $f(p) = p$, $f(p_2) = p'_2$ e que asocia cada un dos $n - 2$ puntos restantes de l co punto resultante ao intersecar a liña que une cada un deses puntos con q e a liña m . Seguindo a notación anterior, se escribimos $p = p_1 = p'_1$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(p_i) = p'_i$. Temos que f é inxectiva, pois se $f(p_i) = f(p_j)$, entón os dous puntos están na recta dada por q e $f(p_i)$ e os dous puntos están tamén en l , logo, son o mesmo punto. Ademais, dado un punto $p'_i \in m$, basta considerar como preimaxe o punto $p_i \in l$ obtido como intersección de $l_{p'_i,q}$ e l . Deste xeito, temos unha bixección entre as dúas liñas que, polo tanto, teñen a mesma cardinalidade.



No caso no que $l \cap m = \emptyset$, podemos considerar unha liña $n \in L$ tal que $n \cap l \neq \emptyset$ e $n \cap m \neq \emptyset$. Neste caso, seguindo o razoamento anterior para l e n , afirmamos que teñen o mesmo número de puntos. Do mesmo xeito, aplicando este razoamento a n e m , chegamos a que o cardinal de l , m e n é o mesmo.

Comprobamos que se cada liña ten n puntos, entón por cada punto pasan $n + 1$ liñas. Sexa $p \in S$ e consideremos $l \in L$ tal que $p \notin l$. Ao unir cada un dos n puntos de l con p obtemos n rectas distintas (por (PA1), dous puntos determinan unha única recta). Se tomamos finalmente a recta paralela a l pasando por p dada polo axioma (PA2), obtemos as $n + 1$ rectas que pasan polo punto p . Non pode haber máis rectas pasando por ese punto, xa que, de ser o caso, considerando a intersección destas rectas con l , chegaríamos a que l tería máis de n puntos. \square

A partir da discusión anterior, temos o seguinte resultado.

Proposición 1.8.3. Un plano afín axiomático de orde n ten n^2 puntos e $n^2 + n$ liñas.

Demostración. Para probar o resultado, demostremos primeiro que o plano afín ten $n + 1$ familias de liñas paralelas, cada unha delas con n liñas.

O número de familias de liñas paralelas podemos velo como o número de liñas distintas que pasan por un punto. Logo, hai $n + 1$ posibles direccións. Se consideramos dúas liñas $l, m \in L$ con $l \cap m \neq \emptyset$, cada unha das liñas paralelas a l cortará m nun único punto, é dicir, hai n liñas paralelas a l (incluíndo a propia l). Isto é, cada familias de rectas paralelas está formada por n elementos.

Deste xeito, chegamos a que hai $n(n + 1) = n^2 + n$ liñas nun plano afín axiomático.

Para rematar, consideramos as parellas (p, l) , con $p \in S$ un punto e $l \in L$ unha liña. Temos unha correspondencia entre o número de puntos multiplicado polo número de rectas pasando por cada punto e o número de rectas multiplicado polo número de puntos por cada recta. É dicir, se n_p é o número de puntos do plano, temos que

$$n_p \cdot (n + 1) = (n^2 + n) \cdot n.$$

Isto é, o número de puntos dun plano afín axiomático é $\frac{(n^2+n) \cdot n}{(n+1)} = n^2$. □

Podemos facer agora un tratamento análogo no caso dos planos proxectivos.

Definición 1.8.2. Un plano proxectivo axiomático é un conxunto de puntos S e liñas L que cumpren as seguintes propiedades:

- (PP1) Dous puntos calquera atópanse nunha única liña.
- (PP2) Toda parella de rectas diferentes córtanse nun único punto.
- (PP3) Existen catro puntos p, q, r, s de maneira que calquera subconxunto de tres non se atopan sobre a mesma recta.
- (PP4) Cada recta contén polo menos tres puntos.

Proposición 1.8.4. Sexa K un corpo e consideramos o espazo proxectivo \mathbb{P}_K^2 . Nese caso, cúmprense os os axiomas (PP1)-(PP4).

Demostración. Consideramos \mathbb{P}_K^2 , proxectivizado de K^3 .

Para probar (PP1), sexan p, q dous puntos de \mathbb{P}_K^2 e consideremos dous vectores de K^3 linealmente independentes tales que $p = [\langle v_1 \rangle]$ e $q = [\langle v_2 \rangle]$. A recta $V = [\langle v_1, v_2 \rangle]$ pasa por p e q e é única, xa que, se $V' = [\langle v'_1, v'_2 \rangle]$ é outra recta tal que $p, q \in V'$, entón $\langle v_1, v_2 \rangle \subset \langle v'_1, v'_2 \rangle$ e, ao ser dous subespazos da mesma dimensión (V e V' teñen dimensión 1), temos $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v'_1, v'_2 \rangle$ e $V = V'$.

Pasamos a (PP2), considerando dúas rectas proxectivas distintas $V = \langle v_1, v_2 \rangle, W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Por ser as rectas distintas, o espazo xerado por v_1, v_2, w_1, w_2 ten dimensión maior ou igual que 3. Ao estarmos en K^3 , un espazo vectorial de dimensión 3, $\dim \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle = 3$. Así, a intersección entre V e W é non baleira, xa que $V \vee W = [\langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle]$ ten dimensión igual a 2, e se empregamos a fórmula de Grassmann, temos que

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V \vee W,$$

de onde se deduce que

$$\dim V \cap W = 1 + 1 - 2 = 0.$$

É dicir, as rectas córtanse e ademais a súa intersección é un punto.

Por último, consideramos $\{v_1, v_2, v_3\}$ unha base de K^3 para probar (PP3). Neste caso, os puntos $p = [\langle v_1 \rangle]$, $q = [\langle v_2 \rangle]$, $r = [\langle v_3 \rangle]$ e $s = [\langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle]$ verifican que ningún deles se atopa sobre a mesma recta. En efecto, calquera subconxunto de tres representantes destes puntos está formado por 3 vectores independentes, logo a dimensión mínima dunha variedade lineal proxectiva que conteña 3 destes puntos terá dimensión 2 e será en todo caso un plano. \square

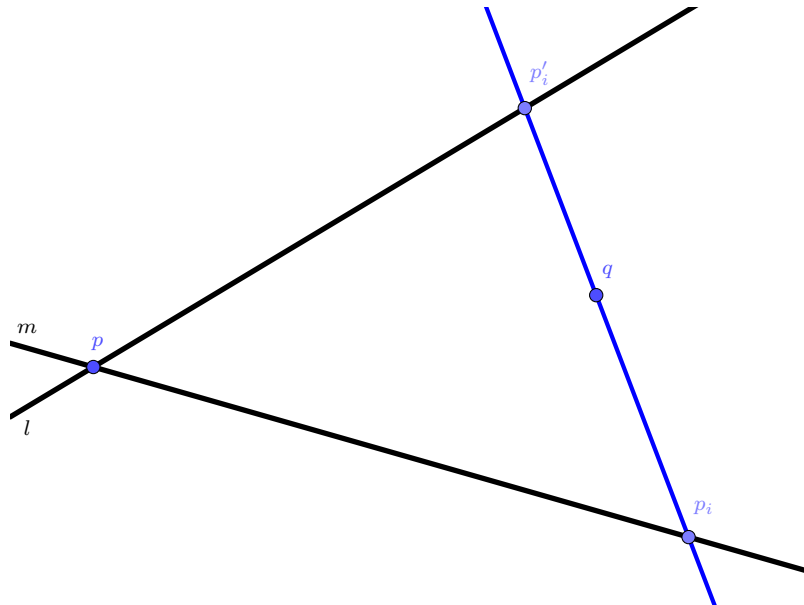
O seguinte resultado amosa que no caso proxectivo hai unha simetría entre puntos e rectas, algo que non sucedía no contexto afín.

Proposición 1.8.5. Supoñamos que S é un conxunto finito. Entón, tódalas rectas conteñen o mesmo número de puntos e cada punto está contido no mesmo número de rectas.

Demostración. Sexan $l, m \in L$ dúas liñas e supoñamos que m ten $n + 1$ puntos. Por (PP2), $l \cap m = \{p\}$, con p un punto de S . Consideremos $q \in S$ un punto tal que $q \notin l$ e $q \notin m$. Para cada punto $s \in m$, podemos considerar a liña pasando por ese punto s e q , que denotamos como l_{sq} . Esta liña corta l nun único punto s' . Deste xeito, se denotamos por p_i , con $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ os puntos de m , con $p_1 = p$, e por p'_i os puntos de l tales que $p'_i = l_{p_i q} \cap l$ (con $p'_1 = p_1$) temos a seguinte bixección:

$$\begin{aligned} f : m &\longrightarrow l \\ p_i &\mapsto p'_i. \end{aligned}$$

Polo tanto, todas as rectas teñen $n + 1$ puntos.



Ademais, o número de rectas pasando por cada punto coincide co número de puntos de cada recta ($n + 1$). En efecto, dado un punto $p \in S$ e unha liña $l \in L$ tal que $p \notin l$, toda recta pasando por p interseca l nun único punto. Logo, hai $n + 1$ rectas pasando por p . \square

Da discusión anterior dedúcese o seguinte resultado.

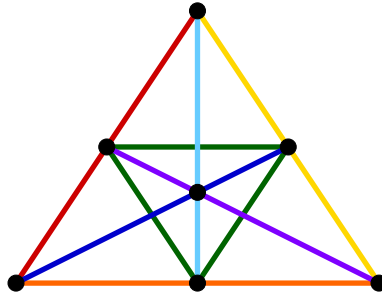
Proposición 1.8.6. O número de puntos (e de rectas) dun plano proxectivo finito é da forma $n^2 + n + 1$.

Demostración. Xa probamos que todas as rectas teñen o mesmo número de puntos, que coincide co número de rectas pasando por cada punto. Sexa $n + 1$ este número. Se $p \in S$ é un punto, dado que por el pasan $n + 1$ rectas, cada unha delas con n puntos ademais de p , ao facer $(n + 1) \cdot n + 1$, estaríamos contando todos os puntos do plano (o punto p e os $n \cdot (n + 1)$ puntos restantes). Deste xeito, hai $n^2 + n + 1$ puntos no plano proxectivo. A continuación, usando un argumento análogo ao do caso afín e sendo n_l o número de liñas do plano, temos,

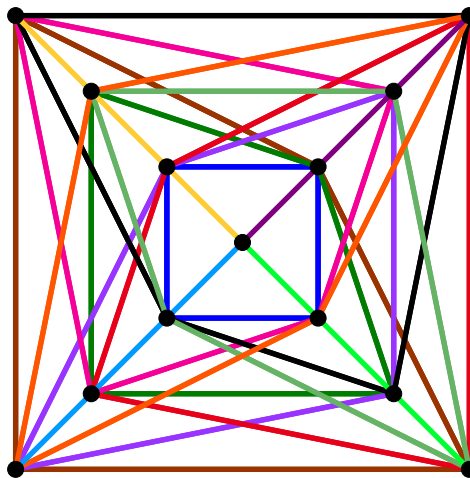
$$(n^2 + n + 1) \cdot (n + 1) = n_l \cdot (n + 1).$$

Deste xeito, o número de liñas coincide co número de puntos e é igual a $n^2 + n + 1$. \square

Para representar o plano proxectivo para $n = 2$, usando os resultados anteriores, sabemos que haberá $2^2 + 2 + 1 = 7$ puntos e 7 liñas, por cada punto pasarán $2 + 1 = 3$ liñas e cada liña constará de $2 + 1 = 3$ puntos. Isto lévanos á representación inferior.



No caso $n = 3$, o número de puntos e de liñas é de $3^2 + 3 + 1 = 13$, hai $3 + 1 = 4$ liñas pasando por cada punto e cada unha destas liñas ten tamén 4 puntos. Unha posible representación sería a seguinte:



A novidade desta definición axiomática do plano proxectivo é que inclúe plano proxectivos que non proveñen de espazos vectoriais. En particular, unha das diferenzas fundamentais é que os axiomas PP1-PP4 non implican o teorema de Desargues (que si é certo cando o plano proxectivo admite unha inmersión nun espazo proxectivo de dimensión 3). O seguinte obxectivo é atopar unha construción axiomática que non cumpre o teorema de Desargues. Para iso, definimos o *plano proxectivo libre* do seguinte xeito.

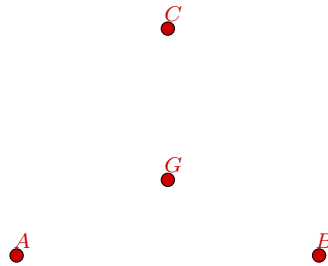
Definición 1.8.3. Sexa S_0 un conxunto de 4 puntos e L_0 o conxunto baleiro. Definimos entón os seguintes conxuntos.

- S_1 é igual a S_0 . L_1 obtense engadindo a L_0 , por cada parella de puntos $p_0, p_1 \in S_0$ que non definen unha recta en L_0 , unha nova recta.
- S_2 é igual a S_1 engadindo, para cada parella de rectas $l_0, l_1 \in L_1$ que non se cortan nun punto en S_1 , un novo punto (asociado á intersección das rectas). L_2 é igual a L_1 .
- Iteramos este proceso, de xeito que se n é par, en (S_n, L_n) engadimos puntos correspondentes ás interseccións das rectas en L_{n-1} , e para n impar engadimos rectas correspondentes aos puntos en S_{n-1} .
- Finalmente, definimos $S = \cup_{n \geq 0} S_n$ e $L = \cup_{n \geq 0} L_n$.

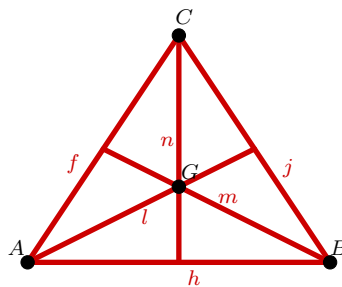
Cúmprese que tanto S como L son infinitos. Diremos que (S, L) é o *plano proxectivo libre* xerado por (S_0, L_0) .

Imos debuxar as configuracións obtidas para $n = 0, 1, 2, 3$.

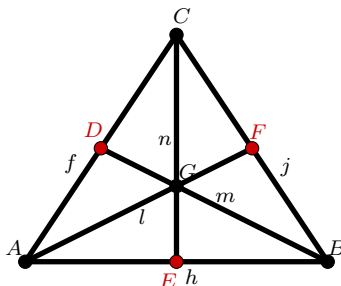
En primeiro lugar, para (S_0, L_0) , temos 4 puntos que denotamos como A, B, C e G .



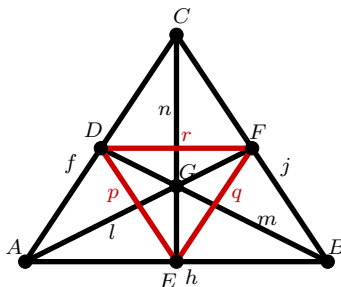
En (S_1, L_1) , temos que engadir 6 liñas, correspondentes ás 6 parellas de puntos que podemos formar con A, B, C e G .



Para formar (S_2, L_2) , cómpre engadir tres puntos, correspondentes á intersección das tres rectas de (S_1, L_1) que non se cortaban en ningún punto (no debuxo, as rectas f e m , l e j e finalmente n e h).



Finalmente, en (S_3, L_3) engadimos 3 liñas máis, unindo os puntos E e D , E e F e tamén D e F .



Observando os debuxos, vemos claramente como as configuracións (S_n, L_n) para $n = 0, 1, 2, 3$ non constitúen un plano proxectivo axiomático. De feito, isto non ocorre para ningún $n \in \mathbb{N}$, debido a que sempre podemos atopar ou ben rectas que non se cortan en ningún punto, ou ben parellas de puntos que non están unidos por ningunha recta.

Proposición 1.8.7. Tense que (S_n, L_n) non é un plano proxectivo axiomático para ningún valor de n . En cambio, (S, L) é un plano proxectivo axiomático.

Demostración. Imos desenvolver a idea anterior. Sexa n un enteiro non negativo e consideremos o par (S_n, L_n) . Se n é par, entón nesta etapa engadíronse rectas correspondentes á unión de parellas de puntos. Entón, estas rectas teñen unicamente 2 puntos e estase incumprindo (PP4), ademais de (PP2), xa que haberá rectas que non corten esta nova liña. Por outra parte, se n é impar, engadíronse puntos definidos como a intersección de unicamente dúas rectas. Se consideramos dous destes novos puntos, temos que non hai ningunha recta pasando por eles, co que non se verifica (PP1). Deste xeito, (S_n, L_n) non é un plano proxectivo axiomático para ningún valor de n .

A continuación, cómpre verificar que (S, L) satisfai (PP1)-(PP4).

- (PP1) Dados dous puntos calquera, existe polo menos unha recta pasando por eles, xa que sempre podemos atopar $n \in \mathbb{N}$ impar suficientemente grande no que unha liña una esta parella de puntos. Ademais, esta recta é única, xa que unha vez estes puntos están unidos, por construción, xa non se volve trazar unha liña entre eles.

- (PP2) Dadas dúas liñas de L , en (S_n, L_n) , para un certo $n \in \mathbb{N}$, engadiuse un punto asociado á intersección destas rectas. Se as dúas liñas se cortasen en máis dun punto, entón, por (PP1), determinarían a mesma liña.
- (PP3) Considerando os catro puntos iniciais de (S_0, L_0) , temos que calquera subconxunto de tres puntos destes non se atopa sobre a mesma liña.
- (PP4) As liñas defínense unindo parellas de puntos, logo, cada unha delas terá polo menos 2 puntos. Se unha liña tivese soamente 2 puntos, estaría incumprido (PP2), xa que, bastaría considerar a intersección de tres liñas calquera con esta liña de dous puntos (cada liña interseca nun único punto, e se son distintas, os puntos de intersección tamén o serán, pois noutro caso, habería un número finito de liñas).

□

Non desenvolvemos aquí a parte correspondente ao recíproco, e que é máis complexa: se impomos que se cumpra o teorema de Desargues, entón podemos recuperar a caracterización alxébrica, salvo no relativo á conmutatividade do corpo, que require incorporar tamén o teorema de Pappus.

1.9. Problemas

Problema 1.1. Sexa $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } y > 0\}$ e $E = \mathbb{R}^2$. Consideramos a aplicación $\alpha : E \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ definida por

$$\alpha((u_1, u_2), (x, y)) = (x + u_1, e^{u_2}y).$$

Demostrar que o par (\mathbb{A}, α) cumpre as definicións de espazo afín e encontrar a aplicación $\delta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow E$ correspondente.

Solución. Temos que comprobar que α define unha acción simplemente transitiva. Para iso, comprobamos tres cousas:

(a) $\alpha((0, 0), (x, y)) = (x + 0, e^0 \cdot y) = (x, y).$

(b)

$$\begin{aligned} \alpha((u_1, u_2), \alpha((v_1, v_2), (x, y))) &= \alpha((u_1, u_2), (x + v_1, e^{v_2}y)) \\ &= (x + u_1 + v_1, e^{u_2}e^{v_2}y) \\ &= \alpha((u_1 + v_1, u_2 + v_2), (x, y)). \end{aligned}$$

(c) Fixemos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Entón, os únicos (u, v) que cumpren

$$\alpha((u, v), (x_1, y_1)) = (x_2, y_2)$$

son as solucións de $x_1 + u = x_2$ e $e^v y_1 = y_2$. Entón, $u = x_2 - x_1$ e $v = \log(y_2/y_1)$.

Polo tanto, tense que

$$\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_2 - x_1, \log(y_2/y_1)).$$

Problema 1.2. Consideramos o plano afín $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo.

- (a) Cantos puntos e cantas rectas ten?
- (b) Cantos puntos ten cada recta?
- (c) Cantas rectas hai paralelas a unha recta dada?
- (d) Cantos feixes diferentes de rectas paralelas hai?

Solución. (a) Un punto represéntase como un par (x, y) , onde $x, y \in K$. Hai p opcións para cada coordenada, polo que en total hai p^2 puntos. No relativo ás rectas, cada unha represéntase por unha ecuación da forma

$$ax + by + c = 0,$$

con $(a, b) \neq (0, 0)$ e onde (a, b, c) e (a', b', c') definen a mesma recta se, e soamente se, un é múltiplo do outro. Polo tanto, hai $p^3 - p$ opcións para (a, b, c) e para cada recta hai $(p - 1)$ eleccións posibles dos coeficientes. Polo tanto, o número de rectas é $\frac{p^3 - p}{p - 1} = p(p + 1) = p^2 + p$.

- (b) Unha recta escríbese como $p + t \cdot v$, con $t \in K$. Entón, hai unha bixección entre os puntos da recta e os valores de t , isto é, hai p opcións. Observamos tamén que, dado un punto, calquera ecuación que pasa por el pódese escribir como $p + t \cdot v$, onde v é un vector non nulo, e dúas rectas son iguais cando os vectores escollidos son proporcionais. Un vector pódese expresar como (a, b) ; se $b = 0$, entón correspóndese coa dirección $(1, 0)$, e, en caso contrario, cunha dirección da forma $(t, 1)$. Como hai p opcións posibles para t , hai en total $p + 1$ rectas por un punto.

Para contar o número total de rectas, podemos proceder como segue. Consideramos os pares (P, L) , onde P é un punto e L unha recta que contén o punto. Entón, para cada un dos p^2 puntos hai $p + 1$ rectas por el. Para cada unha das l rectas, hai p puntos nela. Polo tanto,

$$p^2(p + 1) = l \cdot p,$$

polo que o número de rectas é $p(p + 1)$.

- (c) Cada recta contén p puntos, e os p^2 puntos pertencen a unha, e só a unha, recta paralela a unha dada. Hai polo tanto p rectas paralelas a unha dada (incluída a propia recta). Alternativamente, $ax + by + c = 0$ é paralela a $a'x + b'y + c' = 0$ se, e soamente se, (a, b) é paralelo a (a', b') . Fixado entón (a, b) temos p opcións para o valor de c .
- (d) A pregunta equivale a cantas opcións hai para escoller o vector director dunha recta. Iso equivale a escoller un valor non nulo de (a, b) , entendendo que (a, b) coincide con (a', b') se un é un múltiplo non nulo do outro. Vimos xa que hai $p + 1$ maneira de facer esta elección.

Problema 1.3. Dado un triángulo ABC no plano afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, sexa r a recta que pasa polo punto $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ e polo punto $\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C$. Sexa $P = r \cap BC$. Escribir P como combinación lineal de B e C .

Solución. Imos amosar dúas formas de resolver o problema. Na primeira, consideramos a recta r que pasa polos dous puntos. Entón, pódese parametrizar como

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B + t\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}C\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para que un punto da recta se atope sobre a recta BC , o coeficiente en A ten que ser 0, isto é, $t = -1$. Polo tanto, o punto correspondente é $\frac{4}{3}B - \frac{1}{3}C$.

A segunda solución é co teorema de Menelao. Sexa $C' = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ e $B' = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C$. Entón, o teorema de Menelao afirma que

$$(P, B, C) \cdot (B', C, A) \cdot (C', A, B) = 1.$$

Temos que $(B', C, A) = -1/2$ e $(C', A, B) = -1/2$, polo que $(P, B, C) = 4$. Se $P = xB + (1-x)C$, entón

$$(P, B, C) = \frac{-x}{1-x} = 4,$$

de onde se ten que $x = 4/3$. O cálculo da razón simple fíxose tendo en conta que

$$xB - xC = \mathbf{PC} = (P, B, C)\mathbf{PB} = (1-x)B - (1-x)C.$$

Problema 1.4. Discutir en función do parámetro $a \in \mathbb{R}$ a posición relativa dos planos π_1 e π_2 de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ que teñen por ecuacións na referencia natural

$$\pi_1: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 2 + \mu \\ u = 2, \end{cases} \quad \pi_2: \begin{cases} x - 2u = 0 \\ x + 2y - az = 1, \end{cases}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solución. Para determinar se a intersección é baleira ou non, substituímos as ecuacións de π_1 en termos dos parámetros λ e μ nas expresións de π_2 , e obtemos o sistema

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -3\lambda + (3-a)\mu = 2a - 1. \end{cases}$$

Se $a \neq 6$, o sistema é compatible determinado e a intersección dos dous planos é un punto. Isto ademais é consistente coa fórmula de Grassmann, que neste caso afirmaríase que $4+0 = 2+2$, sendo 4 a dimensión da suma das dúas variedades, 0 a da intersección e 2 a de cada unha delas.

Se $a = 6$ o sistema é incompatible e a intersección é baleira. Se F_1 e F_2 son os subespazos directores de π_1 e π_2 , temos que $\pi_1 = \langle (1, -2, 0, 0), (1, 1, 1, 0) \rangle$ e $\pi_2 = \langle (0, 3, 1, 0), (2, -1, 0, 1) \rangle$. Tense que $F_1 \cap F_2 = \langle (0, 3, 1, 0) \rangle$ e $F_1 + F_2$ ten dimensión 3, polo que de novo o resultado é consistente coa fórmula de Grassmann, que neste caso afirma que $4 + 1 = 2 + 2 + 1$ (a dimensión da suma de variedades é 4, xa que ao ser a intersección baleira é unha máis cá dimensión da suma de subespazos directores).

Problema 1.5. Consideramos o espazo afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

- (a) Encontrar os números reais a para os cales os puntos $P_a = (1, 0, a)$, $Q_a = (0, a - 2, 1)$ e $T = (2, 0, 3)$ están aliñados.

- (b) Para cada número real a , calcular a menor variedade lineal que pasa polos tres puntos do apartado anterior.
- (c) Para os valores de a para os que P_a , Q_a e T non están aliñados, encontrar un punto S tal que P_a , Q_a , T e S non son coplanarios e calcular ecuacións lineais da recta que pasa por T e por S na referencia $\mathcal{R} = \{Q_a, \mathbf{Q}_a\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_a\mathbf{T}, \mathbf{Q}_a\mathbf{S}\}$.
- (d) Sexa Π o plano que, na referencia canónica, ten ecuación $2x - 2y - z - 1 = 0$. Demostrar que (T, P_1, Q_1) forman un sistema de referencia baricéntrico de Π .
- (e) Sexa r a recta que ten por ecuacións na referencia canónica

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ 2y + z = 1. \end{cases}$$

Está a recta r contida no plano Π ? En caso afirmativo, calcular as súas ecuacións na referencia $\mathcal{R}' = \{T; \mathbf{TP}_1, \mathbf{TQ}_1\}$.

Solución. (a) Para que os puntos estean aliñados, consideramos o vector que une T con P_a , isto é $(1, 0, 3 - a)$. Polo tanto, o vector $\mathbf{Q}_a\mathbf{T} = (2, 2 - a, 2)$ ten que ser un múltiplo del. En particular, iso xa implica que $a = 2$, que é unha condición necesaria e suficiente.

- (b) Se $a = 2$, trátase da recta que pasa por $(1, 0, 2)$ e por $(0, 0, 1)$, que ten por ecuacións $x - z = -1$, $y = 0$. En caso contrario, temos que achar a ecuación do plano que pasa por 3 puntos. Dous vectores directores do plano son $(1, 0, 3 - a)$ e $(2, 2 - a, 2)$, que son linealmente independentes xa que $a \neq 2$. Polo tanto, podemos pór

$$0 = \begin{vmatrix} x - 2 & 1 & 2 \\ y & 0 & 2 - a \\ z - 3 & 3 - a & 2 \end{vmatrix}.$$

Simplificando termos, quedáanos

$$(-a^2 + 5a - 6)x + (4 - 2a)y + (2 - a)z + 2a^2 - 7a + 6 = 0.$$

- (c) O punto $(2, 0, 0)$ non pertence ao plano se $a \neq 2$, xa que de ser o caso quedaríanos que

$$-2a^2 + 10a - 12 + 2a^2 - 7a + 6 = 3a - 6 = 0,$$

que querería dicir que $a = 2$. Na referencia \mathcal{R} , o punto T ten coordenadas $(0, 1, 0)$, xa que $T = Q_a + \mathbf{Q}_a\mathbf{T}$, e polo mesmo motivo S ten coordenadas $(0, 0, 1)$. As ecuacións da recta son polo tanto

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

- (d) Para $a = 1$ sabemos que os tres puntos non están aliñados e que polo tanto a variedade lineal que xeran é un plano. É suficiente entón con ver que pertencen ao plano Π , ou equivalentemente, que o plano que xeran os tres puntos é Π . Pondo $a = 1$ na ecuación do apartado (b), temos que

$$-2x + 2y + z + 1 = 0,$$

que é a mesma ecuación cambiada de signo.

- (e) É suficiente coller dous puntos da recta e ver se pertencen ao plano. Collemos por exemplo $A = (1, 0, 1)$ e $B = (1, 1, -1)$ e ambos pertencen. No sistema \mathcal{R}' pomos

$$(1, 0, 1) = (2, 0, 3) + a_1(-1, 0, -2) + b_1(-2, -1, -2).$$

Resolvendo, vemos que $b_1 = 0$ e $a_1 = 1$, polo que as coordenadas dese punto en \mathcal{R}' son $(1, 0)$. De xeito análogo, temos

$$(1, 1, -1) = (2, 0, 3) + a_2(-1, 0, -2) + b_2(-2, -1, -2),$$

de onde resulta que $b_2 = -1$ e $a_2 = 3$. Polo tanto, as coordenadas son $(3, -1)$. A ecuación da recta que pasa polos dous puntos é

$$x + 2y - 1 = 0.$$

Problema 1.6. No espazo afín real $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ consideramos as referencias

$$\mathcal{R} = \{(0, 1, 1), (1, 2, 0), (-1, 3, 1); (0, 1, -1)\}$$

e

$$\mathcal{R}' = \{(1, -1, 0), (2, 1, 0), (0, 3, 1); (0, 0, 2)\},$$

a recta $r = \{(1, 2, 1) + \lambda(2, 0, 1)\}_R$ e o plano $\Pi = \{x + y + z - 1 = 0\}_R$.

- (a) Calcular as matrices de cambio entre as dúas referencias.
 (b) Determinar a ecuación paramétrica de r en \mathcal{R}' .
 (c) Determinar a ecuación cartesiana de Π en \mathcal{R}' .

Solución. (a) Imos comezar atopando a matriz de cambio de base entre os correspondentes espazos vectoriais. Para iso, sexan $\mathcal{B}_u = \{(0, 1, 1), (1, 2, 0), (-1, 3, 1)\}$ e $\mathcal{B}_v = \{(1, -1, 0), (2, 1, 0), (0, 3, 1)\}$ as bases dos espazos vectoriais correspondentes. Para iso, consideramos cada un dos vectores da base \mathcal{B}_u e expresámolo en termos da base \mathcal{B}_v . Por exemplo,

$$(0, 1, 1) = \alpha_1(1, -1, 0) + \beta_1(2, 1, 0) + \gamma_1(0, 3, 1).$$

Neste caso, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (4/3, -2/3, 1)$. Procedendo de xeito similar para o segundo e o terceiro vector, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (-1, 1, 0)$ e $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = (1/3, -1/3, 1)$. Polo tanto, a matriz de cambio de base é

$$(\mathbb{I})_{\mathcal{B}_u, \mathcal{B}_v} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, expresamos a orixe, $(0, 1, -1)$, como

$$(0, 1, -1) = (0, 0, 2) + x(1, -1, 0) + y(2, 1, 0) + z(0, 3, 1).$$

Tense logo que $(x, y, z) = (-20/3, 10/3, -3)$. Polo tanto, o cambio de base exprésase como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20/3 \\ 10/3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

onde (x, y, z) son as coordenadas na referencia \mathcal{R} e (x', y', z') en \mathcal{R}' .

Na parte vectorial, a matriz inversa é

$$({\mathbb{I}})_{\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_u} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Facendo un cálculo análogo para a orixe, obtemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Para atopar a ecuación dunha recta é suficiente con ter a imaxe de dous puntos. Para iso, consideramos $P_1 = (1, 2, 1)$ e $P_2 = (3, 2, 2)$, con coordenadas na referencia \mathcal{R} . Aplicando a matriz de cambio de referencia atopada no apartado anterior, obtemos que a ecuación paramétrica da recta que pasa por P_1 e P_2 é

$$r: \left(\frac{-23}{3}, \frac{13}{3}, -1 \right) + \lambda(7, -5, 9), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (c) Para atopar a ecuación dun plano é suficiente con ter a imaxe de 3 puntos, como o $Q_1 = (1, 0, 0)$, $Q_2 = (0, 1, 0)$ e $Q_3 = (0, 0, 1)$. En \mathcal{R}' os puntos escríbense como $(-16/3, 8/3, -2)$, $(-23/3, 13/3, -3)$ e $(-7, 3, -2)$. Operando, temos que o plano que pasa polos tres puntos é

$$x + 5y + 6z + 4 = 0.$$

Problema 1.7. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ coa referencia natural considéranse os planos $\pi_1: x + y = 0$, $\pi_2: x + z = 3$ e o punto $P = (1, -1, 0)$. Sexa \mathcal{R}' outra referencia afín ya que $\pi_1: y' = 0$, $\pi_2: z' = 0$ e $P = (0, a, b)_{\mathcal{R}'}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Cales son os posibles valores de a e b ?
 (b) Nese caso, que condicións ten que cumprir a referencia \mathcal{R}' ?

Solución. (a) Como $P \in \pi_1$, tense que cumprir que $a = 0$; análogamente, como $P \notin \pi_2$, tense que $b \neq 0$.

- (b) Trátase dun problema con moitos graos de liberdade. Sexa $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ con coordenadas (x, y, z) en \mathcal{R} e coordenadas (x', y', z') en \mathcal{R}' . O cambio de coordenadas exprésase como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix};$$

polo tanto, a priori temos 12 incógnitas. Impomos en primeiro lugar a condición sobre P :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix};$$

iso dános as ecuacións

$$\begin{cases} 1 & = ba_{13} + \alpha \\ -1 & = ba_{23} + \beta \\ 0 & = ba_{33} + \gamma. \end{cases}$$

No caso de π_1 , é suficiente coller tres puntos afinmente independentes, por exemplo, o $(0, 0, 1)$, o $(1, -1, 0)$ e o $(1, -1, 1)$ e impor que os puntos na referencia \mathcal{R}' cumpran $y' = 0$. Para π_2 procédese analogamente. Polo tanto, chégase a un sistema compatible indeterminado, e calquera solución do mesmo é válida.

Problema 1.8. Sexa $ABCD$ un cuadrilátero calquera dun espazo afín real de dimensión $n \geq 2$ e sexan P, Q, R, S os puntos medios dos lados AB, BC, CD e DA , respectivamente.

- Demostrar que P, Q, R, S definen un cuadrilátero se, e soamente se, as dúas diagonais de $ABCD$ non son paralelas.
- No caso anterior, demostrar que $PQRS$ sempre é un paralelogramo cuxo baricentro é o baricentro de $ABCD$ (en particular, P, Q, R, S están no mesmo plano aínda que A, B, C, D non o sexan).
- Demostrar que o propio cuadrilátero $ABCD$ é un paralelogramo se, e soamente se, as dúas diagonais se bisecan mutuamente.

Solución. (a) Podemos escribir $P = \frac{A+B}{2}$, $Q = \frac{B+C}{2}$, $R = \frac{C+D}{2}$ e $S = \frac{D+A}{2}$. Temos polo tanto que $\mathbf{PQ} = \frac{1}{2}\mathbf{AC}$, $\mathbf{QR} = \frac{1}{2}\mathbf{BD}$, $\mathbf{RS} = -\frac{1}{2}\mathbf{AC}$ e $\mathbf{SP} = -\frac{1}{2}\mathbf{BD}$.

Supoñamos que $PQRS$ é un cuadrilátero. Entón, os vectores \mathbf{PQ} e \mathbf{QR} son linealmente independentes, o que quere dicir que \mathbf{AC} e \mathbf{BD} son linealmente independentes e, en particular, iso implica que as diagonais de $ABCD$ non son paralelas. Reciprocamente, se as diagonais de $ABCD$ non son paralelas, isto é, que \mathbf{AC} e \mathbf{BD} son independentes. Nese caso, \mathbf{PQ} e \mathbf{QR} son linealmente independentes, e o mesmo razoalmente pódese estender a outros tres puntos calquera.

- Temos que, polo visto no apartado anterior, $\mathbf{PQ} = \mathbf{SR}$ e $\mathbf{QR} = \mathbf{PS}$, polo que o cuadrilátero é un paralelogramo. O baricentro é

$$\frac{P + Q + R + S}{4} = \frac{2A + 2B + 2C + 2D}{8} = \frac{A + B + C + D}{4},$$

onde empregamos que $P = \frac{A+B}{2}$ e analogamente para o resto de puntos. Tense, por definición, que coincide co de $ABCD$.

- Imos resolver o problema empregando coordenadas. Collemos o sistema de referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AD}; A\}$, polo que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $D = (0, 1)$ e $C = (a, b)$. As diagonais AC e BD teñen ecuacións $bx - ay = 0$ e $x + y = 1$, respectivamente, polo que o punto de corte cumpre $b(1 - y) - ay = 0$, polo que $y = \frac{b}{a+b}$ e $x = \frac{a}{a+b}$. Se $ABCD$ é un paralelogramo, $a = b = 1$, polo que o punto de corte é o $(1/2, 1/2)$, que é o punto medio das dúas diagonais. Reciprocamente, se $(a/(a+b), b/(a+b))$ é o punto medio de AD e BC , chegamos a que $a = b = 1$.

Problema 1.9. En $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^5)$ considéranse as variedades lineais proxectivas

$$M_1 = [(1, 0, -1, 0, 1)] \vee [(0, 1, 0, 1, -1)] \vee [(2, 2, -2, 1, 2)]$$

e

$$M_2: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

- (a) Encontrar as ecuacións de M_1 e dar a súa dimensión.
- (b) Encontrar dúas variedades lineais V_1 e V_2 de maneira que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e $M_2 = V_1 \vee V_2$.
- (c) Determinar $M_1 \cap M_2$ e $M_1 \vee M_2$.

Solución. (a) Temos que encontrar as ecuacións do subespazo vectorial xerado por $(1, 0, -1, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1, -1)$ e $(2, 2, -2, 1, 2)$. Isto equivale a

$$\begin{aligned} x_1 &= a + 2c \\ x_2 &= b + 2c \\ x_3 &= -a - 2c \\ x_4 &= b + c \\ x_5 &= a - b + 2c. \end{aligned}$$

A primeira, a segunda e cuarta ecuacións son independentes, polo que vendo x_1 , x_2 e x_4 como parámetros, podemos escribir a , b e c en función deles, chegando a que $a = x_1 - 2x_2 + 2x_4$, $b = -x_2 + 2x_4$ e $c = x_2 - x_4$. Polo tanto, substituíndo na primeira e na terceira ecuación temos que $x_3 = -x_1$ e $x_5 = x_1 + x_2 - 2x_4$:

$$M_1: \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

- (b) Podemos escribir $x_1 - x_2 = -x_5$ e $2x_1 = -x_3 + x_4$, de xeito que fixar os valores de x_3 , x_4 e x_5 determina os valores de x_1 e x_2 . Polo tanto, o subespazo vectorial asociado a M_2 é $\langle (-1, -1, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 0, 1) \rangle$. Polo tanto, podemos coller $V_1 = [(-1, -1, 2, 0, 0)]$ e $V_2 = [(1, 1, 0, 2, 0) \vee (0, 1, 0, 0, 1)]$.
- (c) Para achar a intersección impomos que se cumpran simultaneamente as ecuacións que definen M_1 e M_2 , resultando que $M_1 \cap M_2 = [\langle (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 1, 0) \rangle]$. Para achar a suma das dúas variedades, que por Grassmann sabemos que terá dimensión 3 (e polo tanto virá dun subespazo vectorial de dimensión 4), partimos do subespazo intersección e completamos ata ter bases de M_1 e M_2 , respectivamente. En particular, $M_1 = [(M_1 \cap M_2) \vee (1, 0, -1, 0, 1)]$ e $M_2 = [(M_1 \cap M_2) \vee (-1, -1, 2, 0, 0)]$. Polo tanto,

$$M_1 \vee M_2 = [\langle (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 1, 0), (1, 0, -1, 0, 1), (-1, -1, 2, 0, 0) \rangle].$$

Problema 1.10. Sexa $\mu \in \mathbb{R}$ e consideremos os planos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$:

$$L_1: 3x - 3y + z - 5t = 0, \quad L_2: 15x + 9y - 15z + \mu t = 0, \quad L_3: 12x + 12y - 16z + 8t = 0.$$

- (a) Canto ten que valer μ para que $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ sexa unha recta? Neste caso, de existir, dar a ecuación da recta.
- (b) En caso contrario, calcular a intersección $L_1 \cap L_2 \cap L_3$.

Solución. (a) Como L_1 e L_3 son planos diferentes, a súa intersección sempre é unha recta. Polo tanto, $(L_1 \cap L_3) \cap L_2$ é unha recta se L_2 contén a recta $L_1 \cap L_3$ e un punto en caso contrario. Para que sexa unha recta, as ecuacións do plano L_2 teñen que ser unha combinación lineal das ecuacións dos planos L_1 e L_3 . Pondo

$$a(3x - 3y + z - 5t) + b(12x + 12y - 16z + 8t) = 15x + 9y - 15z + \mu t$$

vemos que $a = b = 1$ e $\mu = 3$.

(b) Cando non é unha recta, a intersección é un punto. Sumando a primeira e a terceira ecuacións e restando a segunda, temos que $t = 0$. Resolvendo o sistema, temos que a intersección é o punto $[(3, 5, 6, 0)]$.

Problema 1.11. Nun plano proxectivo \mathbb{P}^2 consideramos a recta L de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ nunha certa referencia proxectiva. No plano afín $\mathbb{P}^2 \setminus L$ consideramos a referencia $\{\mathbf{pp}_1, \mathbf{pp}_2; p\}$, onde $p = [(1, 1, 1)]$, $p_1 = [(1, 2, 0)]$ e $p_2 = [(2, 0, 1)]$.

- (a) Expresar as coordenadas afíns (y_1, y_2) en función das coordenadas proxectivas $[(x_1, x_2, x_3)]$.
- (b) Encontrar o punto medio do segmento que une q_1 e q_2 , onde $q_1 = [(2, 1, 1)]$ e $q_2 = [(0, 2, 1)]$.
- (c) Repetir o apartado anterior empregando a razón dobre.

Solución. (a) Pomos $L = [G]$, con $G = \langle (1, -1, 0), (1, 0, -1) \rangle$. Un complementario de G vén dado por $e = (1, 0, 0)$, e todo punto $q \in \mathbb{A}$ escríbese de xeito único como $q = [e + v]$, onde $v \in G$. Para achar o vector v pomos

$$[(x_1, x_2, x_3)] = [(1, 0, 0) + a(1, -1, 0) + b(1, 0, -1)],$$

de xeito que

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= 1 + a + b \\ \lambda x_2 &= -a \\ \lambda x_3 &= -b \end{aligned},$$

de onde temos que $\lambda = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$, $a = \frac{-x_2}{x_1 + x_2 + x_3}$, $b = \frac{-x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$. Polo tanto, o vector v na descomposición é

$$v = \left(\frac{-x_2 - x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}, \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \right).$$

En particular,

$$\begin{aligned} [(1, 1, 1)] &= [(1, 0, 0) + (-2/3, 1/3, 1/3)], \\ [(1, 2, 0)] &= [(1, 0, 0) + (-2/3, 2/3, 0)], \\ [(2, 0, 1)] &= [(1, 0, 0) + (-1/3, 0, 1/3)]. \end{aligned}$$

En particular, $v_1 = (0, 1/3, -1/3)$ e $v_2 = (1/3, -1/3, 0)$. Se un punto q ten coordenadas proxectivas $[(x_1, x_2, x_3)]$ temos que

$$\mathbf{pq} = \frac{1}{3(x_1 + x_2 + x_3)} (2x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3),$$

polo que podemos escribimos como $\mathbf{pq} = y_1 v_1 + y_2 v_2$. Resolvendo o sistema tense que

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad y_2 = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

- (b) As coordenadas afíns de q_1 son $(1/4, 1/2)$, e as de q_2 son $(0, -1)$. Polo tanto, o punto medio é $(1/8, -1/4)$. Para desfacer o cambio, pomos $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ e quedáanos que o punto medio é entón $[(1/4, 11/24, 7/24)]$, ou, multiplicando por 24, $[(6, 11, 7)]$.
- (c) A recta que pasa por q_1 e por q_2 ten ecuación $x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$. O punto de corte coa recta do infinito $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ é o punto $q_3 = [-6 : 5 : 1]$. Temos que q_4 é o punto medio se, e soamente se, $(q_1, q_2; q_3, q_4) = -1$. Para iso, pomos $q_1 = [(2, 1, 1)]$, $q_2 = [(0, 2, 1)]$, de xeito que $q_3 = [(-3) \cdot (2, 1, 1) + 4 \cdot (0, 2, 1)]$. Polo tanto, a coordenada absoluta $\theta_{q_3} = -3/4$, de xeito que para termos unha cuaterna harmónica ten que suceder que $\theta_{q_4} = 3/4$, e entón $q_4 = [6 : 11 : 7]$.

Problema 1.12. No plano proxectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ consideramos a referencia proxectiva estándar \mathcal{R} e pomos $[(x_1, x_2, x_3)]$ para as coordenadas dun punto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ na referencia \mathcal{R} . Sexa $L: 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ e $p_1 = [(0, 1, 1)]$, $p_2 = [(1, 0, -1)]$ e $p_3 = [(0, 3, 1)]$. No plano afín $\mathbb{A} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L$, consideramos a referencia afín $\mathcal{R}' = \{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_3; p_1\}$. Chamamos (y_1, y_2) ás coordenadas dun punto $p \in \mathbb{A}$. Encontrar a ecuación da recta afín que pasa por $[(1, 2, -3)]$ e por $[(2, 1, 5)]$.

Solución. Temos que $L = [G]$, con $G = \langle (1, 3, 0), (0, 2, 1) \rangle$ e un complementario vén dado por $e = \langle (1, 0, 0) \rangle$. En particular, todo elemento de \mathbb{A} con coordenadas proxectivas $[(x_1, x_2, x_3)]$ pode escribirse de xeito único como $[(x_1, x_2, x_3)] = [(1, 0, 0) + v]$, onde $v \in G$. Escribimos entón

$$\begin{aligned}\lambda x_1 &= 1 + a \\ \lambda x_2 &= 3a + 2b, \\ \lambda x_3 &= b\end{aligned}$$

de onde temos que $\lambda = \frac{3}{3x_1 - x_2 + 2x_3}$, $a = \frac{x_2 - 2x_3}{3x_1 - x_2 + 2x_3}$, $b = \frac{3x_3}{3x_1 - x_2 + 2x_3}$. Polo tanto,

$$v = \left(\frac{x_2 - 2x_3}{3x_1 - x_2 + 2x_3}, \frac{3x_2}{3x_1 - x_2 + 2x_3}, \frac{3x_3}{3x_1 - x_2 + 2x_3} \right).$$

En particular, os vectores asociados aos puntos p_1 , p_2 e p_3 , que chamamos u_1 , u_2 e u_3 son $u_1 = (-1, 3, 3)$, $u_2 = (2, 0, -3)$ e $u_3 = (-1, -9, -3)$. Polo tanto, temos os vectores $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 = (3, -3, -6)$ e $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 = (0, -12, -6)$.

Os vectores v e w correspondentes aos puntos da recta dada son $v = (-8/5, -6/5, 9/5)$ e $w = (-3/5, 1/5, 1)$. Polo tanto, para achar as coordenadas do primeiro dos puntos da recta pomos

$$(-3/5, -21/5, -6/5) = v - u_1 = a_1\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + b_1\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3,$$

polo que $(a_1, b_1) = (-1/5, 2/5)$. Para o segundo punto,

$$(2/5, -14/5, -2) = w - u_1 = a_2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + b_2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3,$$

de onde queda que $(a_2, b_2) = (2/15, 1/5)$.

O problema agora redúcese a atopar a ecuación da recta afín que pasa por (a_1, b_1) e por (a_2, b_2) , que é

$$y = \frac{1}{5} + \frac{-1/5}{1/3} \left(x - \frac{2}{15} \right).$$

Simplificando e agrupando termos, quedáanos

$$15x + 25y - 7 = 0.$$

Problema 1.13. Sexa ABC un triángulo de \mathbb{P}^2 e p un punto que non pertence ao triángulo. Considéranse as proxeccións de p desde cada vértice sobre o lado oposto e, para cada proxección, o cuarto harmónico respecto dos vértices dese lado. Demostrar que os puntos obtidos están aliñados. A recta resultante chámase a *polar harmónica* de p .

Solución. Sexa $\{A, B, C; P\}$ un sistema de referencia proxectivo. Entón, as proxeccións sobre os lados do triángulo teñen coordenadas $A' = [0 : 1 : 1]$, $B' = [1 : 0 : 1]$ e $C' = [1 : 1 : 0]$. Para achar o cuarto harmónico na recta BC , é dicir, o punto A'' tal que $(B', C'; A', A'') = -1$, fixamos un sistema de referencia na recta, $\{B, C; U\}$, con $B = [(0, 0, 1)]$, $C = [(0, 0, 1)]$ e U un punto unidade que non cómpre precisar. Entón, $A' = [(0, 1, 0) + (0, 0, 1)]$, polo que a coordenada absoluta é $\theta_{A'} = 1$. Pola condición de ser cuaterna harmónica, $\theta_{A''} = -1$. Nese caso, $A'' = [0 : -1 : 1]$. De xeito similar, $B'' = [-1 : 0 : 1]$ e $C'' = [-1 : 1 : 0]$. Temos que

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

polo que os tres puntos están aliñados.

Problema 1.14. Sexa $ABCD$ un cuadrilátero no plano proxectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Os lados AB e CD córtanse en O , e os lados AD e BC , en O' . Unha recta por O (diferente de AB e de CD) corta os lados AD e BC nos puntos P e Q , respectivamente. Unha recta por O' (diferente de AD e CB) corta os lados AB e DC en M e N , respectivamente. Sexa H o punto de corte de NP e MQ . Demostrar que A , C e H están aliñados.

Solución. Sexa $\{A, B, C; D\}$ un sistema de referencia proxectiva. O punto O é a intersección da recta AB , que ten por ecuación $z = 0$, e da recta CD , que ten por ecuación $x = y$, polo que $O = [1 : 1 : 0]$. De xeito similar, o punto O' é a intersección de AD e BC , polo que $O' = [0 : 1 : 1]$. O punto P pertence á recta AD , de ecuación $y = z$ e é distinto de A , polo que podemos pór $P = [1 : a : a]$; considerando o corte da recta OP con BC , temos que $Q = [0 : a - 1 : a]$. De xeito similar, pomos $M = [1 : b : 0]$ e $N = [1 : 1 : 1 - b]$. A ecuación da recta NP é

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & a & 1 \\ z & a & 1 - b \end{vmatrix} = -abx + (a + b - 1)y + (1 - a)z = 0,$$

mentres que a de MQ é

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & b & a - 1 \\ z & 0 & a \end{vmatrix} = abx - ay + (a - 1)z = 0.$$

Resolvendo, quédanos que o punto de corte é o $H = [1 - a : 0 : ab]$. Como a recta AC ten ecuación $y = 0$, o punto H claramente pertence.

Problema 1.15. Nun paralelogramo $ABCD$ do plano afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, unha paralela aos lados AD e BC corta os lados AB e DC nos puntos M e N , respectivamente, e unha paralela aos lados AB e DC corta os lados AD e BC nos puntos P e Q , respectivamente. Se as rectas NP e MQ se cortan nun punto H , demostrar que A , C e H están aliñados.

Solución. *Primeira opción (con coordenadas afíns).* Fixamos o sistema de coordenadas afíns $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AD}; A\}$, de xeito que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $D = (0, 1)$ e $C = (1, 1)$, por tratarse dun paralelogramo. Pomos $M = (a, 0)$, $N = (a, 1)$, $P = (0, b)$ e $Q = (1, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. A ecuación da recta NP é

$$y = b + \left(\frac{1-b}{a}\right)x,$$

e a da recta MQ é

$$y = \frac{b}{1-a}(x-a),$$

polo que o punto de corte é $H = \left(\frac{ab}{a+b-1}, \frac{ab}{a+b-1}\right)$. Este punto está sobre a recta AC , xa que a ecuación é simplemente $x - y = 0$.

Segunda opción (proyectiva). O enunciado trátase dun caso particular do problema anterior, collendo OO' como recta do infinito, de xeito que $ABCD$ é un paralelogramo, MN é unha paralela a AD e PQ é unha paralela a AB .

Problema 1.16. Cada lado dun triángulo equilátero divídese en N partes iguais, e considéranse as rectas que unen un vértice con cada unha das divisións do lado oposto, polo que se trazan en total $3(N-1)$ rectas. Sexa M o número de puntos de corte desas rectas que se atopan no interior do triángulo, isto é, que non están sobre ningún dos lados.

- Cantos puntos de corte hai cando $M = 4$?
- Cantos puntos de corte hai cando $M = p$ é un número primo?
- Se $M = p$, determinar en cantas rexións queda dividido o triángulo.

Solución. (a) Sexan B_1, B_2, B_3 os tres puntos que marcamos ao dividir o lado AC , con B_1 máis preto de A e sendo B_2 o punto medio. De xeito similar, sexan C_1, C_2, C_3 os tres puntos que se marcan ao dividir o lado AB , con C_1 máis preto de A e sendo C_2 o punto medio. Sexa A_2 o punto medio de BC . Entón as rectas AA_2, BB_1 e CC_1 concorren polo teorema de Ceva; o mesmo ocorre con AA_2, CC_1 e BB_1 , e tamén con AA_2, BB_3 e CC_3 . Polo tanto, a recta AA_2 non produce novos puntos de corte ao intersecar as outras seis rectas. Sexa agora A_1 o punto de BC máis próximo a B que aparece ao facer a división. Entón, as rectas BB_1, CC_2 e AA_1 concorren, polo que non se produce un novo punto de corte nesas dúas interseccións; o mesmo sucede para BB_2, CC_3 e AA_1 . Polo tanto, só se xeran dous novos puntos de corte, que son os correspondentes ao corte con BB_3 e con CC_1 . Por un razoamento análogo vemos que definindo A_3 como o simétrico de A_1 con respecto a A_2 , a recta AA_3 xera dous novos puntos de corte. Polo tanto, hai 13 puntos de corte.

- Sexa C' un punto sobre o lado BC de xeito que $\frac{AC'}{C'B} = \frac{i}{p-i}$, para $1 \leq i \leq p-1$; de xeito similar, sexa A' sobre BC con $\frac{BA'}{A'C} = \frac{j}{p-j}$, e B' sobre CA con $\frac{CB'}{B'A} = \frac{k}{p-k}$. Entón, polo teorema de Ceva, as tres rectas concorren se, e soamente se,

$$ijk = (p-i)(p-j)(p-k) = p^3 - (i+j+k)p^2 + (ij+jk+ki)p - ijk,$$

ou o que é o mesmo,

$$p(p^2 - (i+j+k)p + ij+jk+ki) = 2ijk.$$

O lado esquerdo sempre é múltiplo de p , mentres que o dereito non o é, co cal non pode haber novos puntos nos que concorran tres rectas.

Ao trazar as rectas que unen C cos vértices de AB e B cos vértices de AC xéranse $(p-1)^2$ puntos de corte. Ao unir os $(p-1)$ puntos de BC con A aparecen $2p-2$ puntos por cada unha das $(p-1)$ rectas, polo que hai $(p-1)^2 + (p-1)(2p-2) = 3(p-1)^2$ puntos de corte.

- (c) Se debuxamos primeiro as rectas que unen o vértice B cos puntos do lado oposto, o triángulo queda dividido en p triángulos. As rectas desde B dividen cada un dos p triángulos anteriores en p partes disxuntas, polo que nos quedan p^2 rexións. Cada recta trazada desde A aumenta o número de rexións nun número exactamente igual ao seu número de interseccións coas rectas que atopa, incluíndo o lado AB . É dicir, $2(p-1) + 1 = 2p - 1$. Polo tanto, o número de rexións nas que queda dividido o triángulo é

$$p^2 + (p-1)(2p-1) = 3p^2 - 3p + 1.$$

Problema 1.17. Sexa ABC un triángulo de \mathbb{P}^2 e r unha liña de xeito que $A, B, C \notin r$. Sexa $A' = BC \cap r$, $B' = CA \cap r$ e $C' = AB \cap r$, onde BC refírese á recta que pasa por B e C , e analogamente para as outras notacións. Sexan A'' , B'' e C'' tres puntos que non coincidan cos vértices, e de xeito que $A'' \in BC$, $B'' \in CA$ e $C'' \in AB$. Demostrar que AA'' , BB'' e CC'' son concurrentes se, e soamente se,

$$(B, C, A'', A') \cdot (C, A, B'', B') \cdot (A, B, C'', C') = -1.$$

Como se recupera a partir deste resultado o teorema de Ceva afín?

Solución. Fixamos un sistema de referencia proxectivo $\{A, B, C; U\}$, e consideramos que a recta r ten ecuación $ax + by + cz = 0$. Entón, tense que $A' = [0 : -c : b]$, $B' = [-c : 0 : a]$ e $C' = [-b : a : 0]$. Como os puntos A'' , B'' e C'' non coinciden cos vértices, temos que teñen exactamente dúas coordenadas que non son 0, polo que podemos pór $A'' = [0 : \alpha : 1]$, $B'' = [1 : 0 : \beta]$ e $C'' = [\gamma : 1 : 0]$. A recta AA'' ten ecuación $-y + \alpha z = 0$; a recta BB'' , $\beta x - z = 0$; e a recta CC'' , $-x + \gamma y = 0$. Polo tanto, as tres rectas concorren se, e soamente se,

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & -1 \\ -1 & 0 & \gamma \\ \alpha & -1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma - 1 = 0.$$

Para achar a razón dobre $(B, C; A'', A')$, pomos $B = [(0, 1, 0)]$ e $C = [(0, 0, 1)]$. Entón, $A'' = [\alpha(0, 1, 0) + (0, 0, 1)]$, polo que a súa coordenada absoluta é α ; analogamente, a coordenada absoluta de A' é $-c/b$. Iso quere dicir que $(B, C; A'', A') = -\frac{c}{b\alpha}$. Analogamente, $(C, A; B'', B') = -\frac{a}{c\beta}$ e $(A, B; C'', C') = -\frac{b}{a\gamma}$. Polo tanto,

$$(B, C, A'', A') \cdot (C, A, B'', B') \cdot (A, B, C'', C') = \frac{-1}{\alpha\beta\gamma},$$

que vale -1 se, e soamente se, $\alpha\beta\gamma = 1$. Polo tanto, as dúas condicións son equivalentes. O teorema de Ceva afín recupérase tomando como r a recta do infinito, de xeito que A' , B' e C' son os puntos do infinito de cada unha das rectas.

Problema 1.18. Sexa ABC un triángulo de \mathbb{P}^2 e sexa P un punto. Sexan $A'' = BC \cap AP$, $B'' = CA \cap BP$ e $C'' = AB \cap CP$. Sexan A' , B' e C' tres puntos distintos que non coincidan cos vértices e de xeito que $A' \in BC$, $B' \in CA$ e $C' \in AB$. Demostrar que A' , B' e C' están aliñados se, e soamente se,

$$(B, C, A'', A') \cdot (C, A, B'', B') \cdot (A, B, C'', C') = -1.$$

Como se recupera a partir deste resultado o teorema de Menelao afín?

Solución. Fixamos un sistema de referencia baricéntrico $\{A, B, C; P\}$. Deste xeito, $A'' = [0 : 1 : 1]$, $B'' = [1 : 0 : 1]$ e $C'' = [0 : 1 : 1]$. Como os puntos A' , B' e C' non coinciden cos vértices, teñen exactamente dúas compoñentes non cero, polo que podemos pór $A' = [0 : \alpha : 1]$, $B' = [1 : 0 : \beta]$ e $C' = [\gamma : 1 : 0]$. Os puntos están aliñados se, e soamente se,

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & -1 \\ -1 & 0 & \gamma \\ \alpha & -1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma - 1 = 0.$$

Procedendo igual que no exercicio anterior, o valor da razón dobre é $\frac{-1}{\alpha\beta\gamma}$, que vale -1 se, e soamente se, $\alpha\beta\gamma = 1$.

Problema 1.19. En $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, consideramos un triángulo de vértices A, B, C . Sexan M e N dous puntos que non pertencen a ningún lado do triángulo. Supoñamos tamén que a recta $L = M \vee N$ non contén ningún vértice. Sexan $A' = L \cap (B \vee C)$, $B' = L \cap (A \vee C)$ e $C' = L \cap (A \vee B)$. Sexa \bar{A} o punto tal que $\{M, N\}$ e $\{A', \bar{A}\}$ se dividen harmonicamente; \bar{B} o punto tal que $\{M, N\}$ e $\{B', \bar{B}\}$ se dividen harmonicamente; e \bar{C} o punto tal que $\{M, N\}$ e $\{C', \bar{C}\}$ se dividen harmonicamente. Demostrar que as rectas $A \vee \bar{A}$, $B \vee \bar{B}$ e $C \vee \bar{C}$ son concorrentes.

Solución. Consideramos o sistema proxectivo $\{A, B, C; M\}$, e como N non pertence ao lado AB podemos pór $N = [a : b : 1]$. Entón, a ecuación da recta MN é

$$0 = \begin{vmatrix} x & 1 & a \\ y & 1 & b \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-b)x + (a-1)y + (b-a)z = 0.$$

O punto A' é a intersección de MN con BC , que ten por ecuación $x = 0$. Polo tanto $A' = [0 : a-b : a-1]$. De xeito análogo, $B' = [a-b : 0 : 1-b]$ e $C' = [a-1 : b-1 : 0]$. Para achar o cuarto harmónico de A' , é dicir, o punto \bar{A} tal que $(M, N; A', \bar{A}) = -1$, procedemos do seguinte xeito. Pomos $M = [(1, 1, 1)]$ e $N = [(a, b, 1)]$ e buscamos $x_1, y_1 \in K$ de xeito que $[(0, a-b, a-1)] = [x_1(1, 1, 1) + y_1(a, b, 1)]$. Vemos que neste caso $x_1 = a$ e $y_1 = -1$, polo que a coordenada absoluta $\theta_{A'} = -a$ e $\theta_{\bar{A}} = a$. De aquí temos que $\bar{A} = [2a : a+b : a+1]$. Análogamente, $\bar{B} = [a+b : 2b : b+1]$ e $\bar{C} = [a+1 : b+1 : 2]$.

A ecuación da recta $A\bar{A}$ é $-(a+1)y + (a+b)z = 0$; a de $B\bar{B}$ é $(b+1)x - (a+b)z = 0$; finalmente a de $C\bar{C}$ é $-(b+1)x + (a+1)y = 0$. Como a terceira coincide coa suma das dúas primeiras cambiada de signo, temos que as tres rectas concorren.

Alternativamente, pódese aplicar o teorema de Menelao cos puntos A' , B' e C' e empregar as relacións entre a razón dobre e a razón simple para concluír empregando o teorema de Ceva con $A\bar{A}$, $B\bar{B}$ e $C\bar{C}$.

Problema 1.20. Sexa $ABCD$ un paralelogramo no plano afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Sexa P un punto no plano que non pertence a ningún lado nin diagonal de $ABCD$. Sexan E e F os baricentros de ABP e CDP , respectivamente. Sexa M o punto medio de EF .

- (a) Demostrar que EF é paralela a AD .
- (b) Demostrar que M é o baricentro de APC .

Solución. Fixamos a referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AD}; A\}$, de xeito que $C = (1, 1)$ por tratarse dun paralelogramo.

- (a) No sistema de referencia que fixamos, $E = \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b}{3}\right)$ e $F = \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$. Polo tanto, $\mathbf{EF} = \left(0, \frac{2}{3}\right)$, que ten a mesma dirección que \mathbf{AD} .
- (b) As coordenadas de M son $\left(\frac{a+1}{3}, \frac{b+1}{3}\right)$, que coinciden coas do baricentro de APC .

Problema 1.21. Este problema discute a *construción do cuarto harmónico* no plano afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Sexa AB un segmento e X un punto diferente de A e B ; imos supor que está no interior, sendo análogo o caso no que é exterior. Sexa C un punto fóra da recta. Trazamos rectas AA' e BB' ($A' \in BC$ e $B' \in CA$) que concorren con CX . Sexa $Y = A'B' \cap AB$. Entón $(A, B; X, Y) = -1$ e en particular o punto Y non depende nin da elección de C nin das rectas AA' e BB' .

Solución. Imos amosar unha solución empregando os teoremas de Ceva e Menelao; por suposto, tamén se pode facer o problema empregando coordenadas proxectivas. Tomamos como recta do infinito unha calquera que non conteña a ningún dos puntos implicados na configuración (que sempre existe xa que \mathbb{R} é un corpo infinito). Entón, aplicando o teorema de Ceva ao triángulo ABC coas rectas AA' , BB' e CX temos que

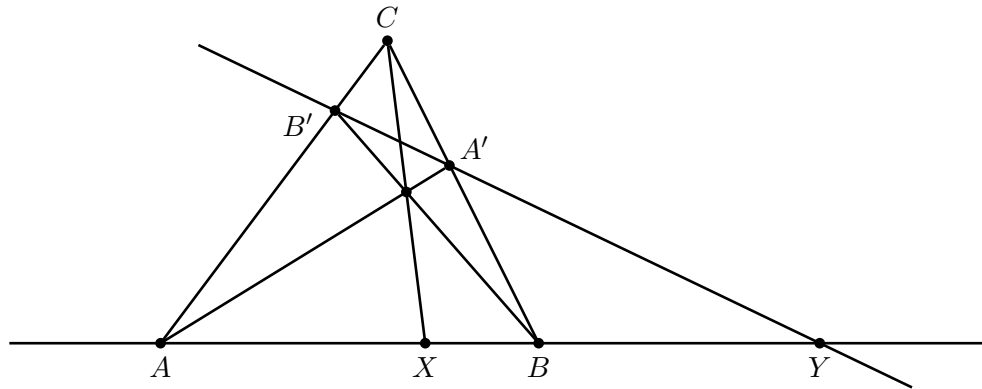
$$(X, A, B)(A', B, C)(B', C, A) = -1.$$

Aplicamos agora o teorema de Menelao nese mesmo triángulo coa recta que pasa por Y , A' e B' :

$$(Y, A, B)(A', B, C)(B', C, A) = 1.$$

Dividindo as dúas igualdades temos que

$$(A, B; X, Y) = \frac{(Y, A, B)}{(X, A, B)} = -1.$$



Problema 1.22. Os seguintes apartados poden resolverse de forma independente. Alternativamente, o apartado (a) pode empregarse para resolver o apartado (b).

- (a) Sexa $ABCD$ un cuadrilátero no plano proxectivo real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Sexa E o punto de corte das rectas AB e CD , e sexa F o punto de corte das rectas AD e BC . As rectas AC e BD cortan EF nos puntos X e Y , respectivamente. Demostrar que $(E, F; X, Y)$ é unha cuaterna harmónica.
- (b) Sexa $ABCD$ un trapezio no plano afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, coa recta AB paralela a CD , pero de xeito que AD e BC non son paralelas. Sexa M o punto de corte de AD e BC . A recta paralela a AB por M corta á diagonal AC en P e á diagonal BD en Q . Demostrar que M é o punto medio de PQ .

Solución. (a) **Primeira solución (con coordenadas proxectivas).** Consideramos a referencia $\{A, B, C; D\}$, polo que podemos pór $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$, $C = [0 : 0 : 1]$ e $D = [1 : 1 : 1]$. A recta AD ten ecuación $y = z$, e a recta BC ten ecuación $x = 0$, polo que $F = [0 : 1 : 1]$. De xeito similar, $E = [1 : 1 : 0]$. Temos entón que a ecuación da recta EF e $y = x + z$. Deste xeito, $X = [1 : 0 : -1]$ e $Y = [1 : 2 : 1]$. Temos entón que collendo a referencia $\{v_1, v_2\}$, con $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$, podemos escribir $E = [v_1]$, $F = [v_2]$, $X = [v_1 - v_2]$ e $Y = [v_1 + v_2]$. As coordenadas absolutas de X e Y , θ_X e θ_Y , son 1 e -1 , respectivamente, polo que a razón dobre é -1 .

Segunda solución (con Ceva e Menelao). Consideramos como recta do infinito calquera que non conteña ningún dos puntos implicados na configuración. Entón, ao sacar esa recta, temos unha estrutura de espazo afín. Podemos aplicar o teorema de Ceva ao triángulo AEF , considerando as rectas AX , ED e FB , que se cortan no punto C . Deste xeito,

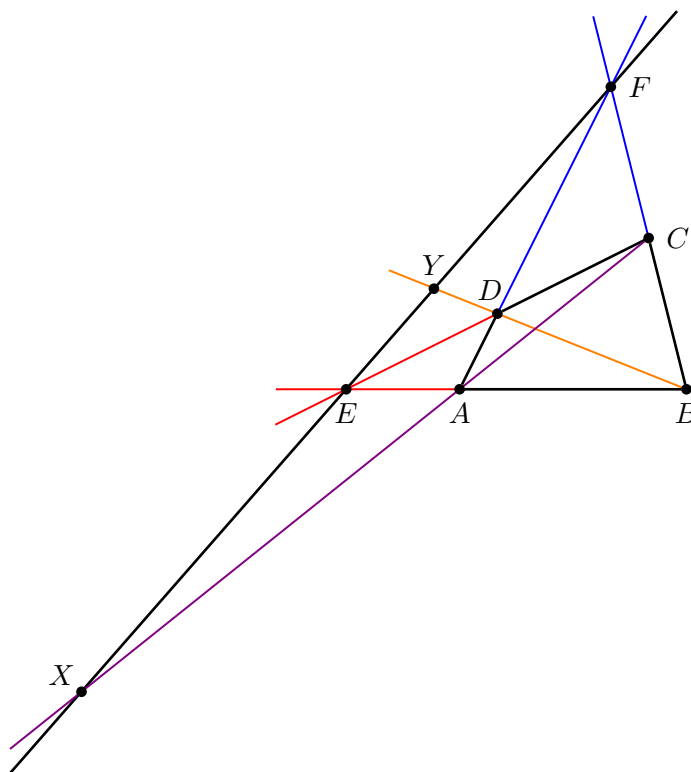
$$(B, A, E)(X, E, F)(D, F, A) = -1.$$

Aplicando agora o teorema de Menelao ao mesmo triángulo AEF , pero coa recta que corta aos lados nos puntos B , D e Y , temos que

$$(B, A, E)(Y, E, F)(D, F, A) = 1.$$

Dividindo as dúas igualdades, obtemos que

$$(E, F; X, Y) = \frac{(Y, E, F)}{(X, E, F)} = -1.$$



- (b) **Primeira solución (con coordenadas affíns).** Consideramos a referencia afín $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AD}; A\}$, de xeito que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ e $D = (a, 1)$, con $a \neq 0, 1$, pola condición de que AD e BC non sexan paralelas. A ecuación da recta AD é $x = 0$ e a da recta BC é $x + (1 - a)y = 1$. Entón, $M = \left(0, \frac{1}{1-a}\right)$. A ecuación da paralela a AB por M é $y = \frac{1}{1-a}$. Para achar o punto P , usamos que a ecuación de AC é $x - ay = 0$, polo que $P = \left(\frac{a}{1-a}, \frac{1}{1-a}\right)$. De xeito similar, a ecuación de BD é $x + y = 1$, de onde se deduce que $Q = \left(\frac{-a}{1-a}, \frac{1}{1-a}\right)$. De aquí é inmediato que M é o punto medio de PQ .

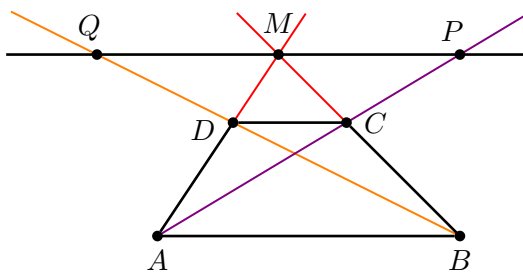
Segunda solución (con coordenadas baricéntricas). Sexa $\{A, B, D\}$ un sistema de referencia baricéntrico, de xeito que $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $D = (0, 0, 1)$. A condición de que a recta CD sexa paralela a AB quere dicir que $C = D + \alpha(B - A)$, para algún $t \in \mathbb{R}$. Polo tanto, $C = (\alpha, -\alpha, 1)$. O punto M é a intersección das rectas $y = 0$ e $x - \alpha z = 0$, polo que $M = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}, 0, \frac{1}{\alpha+1}\right)$. A ecuación da paralela a AB por M é

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}, 0, \frac{1}{\alpha+1}\right) + t(-1, 1, 0).$$

A intersección coa recta AC , que ten ecuación $y + \alpha z = 0$, dá o punto $P = \left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}, \frac{-\alpha}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}\right)$. De xeito similar, a intersección con BD , que ten ecuación $x = 0$, dá o punto $Q = \left(0, \frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}\right)$. É inmediato comprobar que $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = M$, polo que é o punto medio.

Terceira solución (proyectiva). Sexa N o punto do infinito correspondente á intersección de AB e CD . Polo apartado anterior, $(P, Q; N, M) = -1$, e como N

é o punto do infinito correspondente á recta PQ , entón M é o punto medio do segmento PQ .



Capítulo 2

Afinidades e proxectividades

Ao longo de todo o tema, sexa K un corpo e E un K -espazo vectorial. O obxectivo é definir os morfismos entre espazos afíns e proxectivos, para os cales hai dúas maneiras naturais de proceder. A primeira é impor que sexan transformacións que preservan a estrutura alxébrica; isto ten a vantaxe de que nos permite traballar en termos de matrices e aplicar tódolos resultados previos de álgebra lineal. En cambio, esa definición é pouco natural desde un punto de vista xeométrico. Dado que a idea que queremos transmitir é que son transformacións lineais, unha primeira aproximación pode ser pedir que se conserven as rectas, é dicir, que puntos aliñados vaian a puntos aliñados. A priori, esta noción pode ser complicada para traballar con ela, e para iso formularemos un dos resultados principais do tema, que afirma que ambos conceptos están estreitamente relacionados. Posteriormente, procederemos ao estudo das variedades invariantes por unha transformación deste tipo, que é algo análogo ao estudo dos vectores propios.

2.1. Afinidades: definición e propiedades

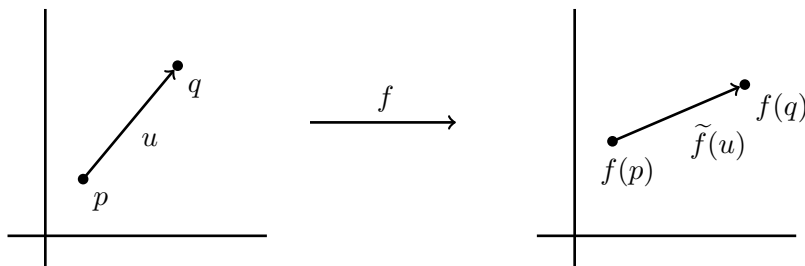
Sexan (\mathbb{A}, E, δ) e $(\mathbb{A}', E', \delta')$ dous espazos afíns, onde E e E' son K -espazos vectoriais.

Definición 2.1.1. Unha aplicación $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ é unha *aplicación afín* ou *afinidade* se existe un punto $p \in \mathbb{A}$ de maneira que a composición

$$\tilde{f} : E \xrightarrow{\delta_p^{-1}} \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{A}' \xrightarrow{\delta'_{f(p)}} E' \quad u \mapsto q = p + u \mapsto f(q) \mapsto f(q) - f(p)$$

é unha aplicación K -lineal de espazos vectoriais. A $\tilde{f} = \delta'_{f(p)} f \delta_p^{-1}$ chámase *aplicación lineal asociada*.

Coas notacións habituais, podemos escribir $\tilde{f}(\mathbf{p}\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(\mathbf{q})$ e $f(p+u) = f(p) + \tilde{f}(u)$.



Nalgunhas referencias, a definición anterior emprégase para aplicación afín, e unha afinidade introdúcese como unha aplicación afín bixectiva. Porén, nós empregaremos aplicación afín e afinidade como sinónimos.

Por outro lado, na definición pídese que exista un punto p de xeito que a aplicación asociada \tilde{f} sexa lineal. Máis en concreto, se f é afín, entón para todo $q \in \mathbb{A}$, temos que $\delta_{f(q)} f \delta_q^{-1}$ é lineal e independente de q , polo que o punto p non xoga ningún papel na definición.

Proposición 2.1.1. Supoñamos que f é unha afinidade. Entón, para todo $p \in \mathbb{A}$, a aplicación $\delta'_{f(p)} \circ f \circ \delta_p^{-1}$ é lineal e independente do punto p .

Demostración. Consideramos puntos q e q' de xeito que $u = \mathbf{p}q = \mathbf{p}'q'$. Entón, temos que \tilde{f}_p cumpre que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{p'}(u) &= \mathbf{f}(\mathbf{p}')\mathbf{f}(q') \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{p}')\mathbf{f}(p) + \mathbf{f}(p)\mathbf{f}(q') \\ &= -\mathbf{f}(p)\mathbf{f}(\mathbf{p}') + \mathbf{f}(p)\mathbf{f}(q') \\ &= -\tilde{f}_p(\mathbf{p}\mathbf{p}') + \tilde{f}_p(\mathbf{p}q') \\ &= -\tilde{f}_p(\mathbf{p}\mathbf{p}') + \tilde{f}_p(\mathbf{p}\mathbf{p}' + \mathbf{p}'q') \\ &= \tilde{f}_p(u) \end{aligned}$$

□

A seguinte proposición permite caracterizar as aplicacións afíns en termos das combinacións lineais de puntos.

Proposición 2.1.2. Sexa $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ unha aplicación. Entón, f é unha aplicación afín se e soamente se é compatible coas combinacións lineais de puntos; isto é, para calquera número finito de puntos $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{A}$ e escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ de maneira que $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$, cúmprese que

$$f(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r) = \alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_r f(p_r).$$

Demostración. Supoñamos que f é unha afinidade. Entón, temos que

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r) &= f(p_1 + \alpha_2 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{p}_r \mathbf{p}_1) \\ &= f(p_1) + \alpha_2 \tilde{f}(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1) + \dots + \alpha_r \tilde{f}(\mathbf{p}_r \mathbf{p}_1) \\ &= f(p_1) + \alpha_2 (f(p_2) - f(p_1)) + \dots + \alpha_r (f(p_r) - f(p_1)) \\ &= \alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_r f(p_r) \end{aligned}$$

onde na última igualdade empregamos que $1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i = \alpha_1$.

Para ver o recíproco, temos que comprobar que a aplicación \tilde{f} é lineal. Cúmprese que $\tilde{f}(u+v) = f(p+u+v) - f(p)$ e $\tilde{f}(u) = f(p+u) - f(p)$, $\tilde{f}(v) = f(p+v) - f(p)$. Polo tanto, chega con ver que

$$f(p+u+v) = f(p+u) + f(p+v) - f(p).$$

Pondo $u = q - p$ e $v = r - p$, a igualdade anterior é equivalente $f(q+r-p) = f(q) + f(r) - f(p)$, que se segue do feito de que se conserven combinacións lineais de puntos xa que os coeficientes de $q+r-p$ suman 1.

O razoamento para o produto por escalares é análogo, xa que $\tilde{f}(\lambda u) = f(p + \lambda u) - f(p)$, polo que hai que establecer que

$$f(p + \lambda u) = \lambda f(p + u) + (1 - \lambda)f(p).$$

Igual que antes, pomos $u = q - p$. Entón

$$f(p + \lambda u) = f(\lambda q + (1 - \lambda)p) = \lambda f(q) + (1 - \lambda)f(p),$$

onde na segunda igualdade empregamos a hipótese sobre as combinacións lineais de puntos. \square

Lema 2.1.1. Sexan $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ e $g: \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$ afinidades con aplicacións lineais asociadas \tilde{f} e \tilde{g} , respectivamente. Entón, a composición de aplicacións afíns tamén o é, e cúmprese que $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Ademais, as aplicacións δ_p e $\delta'_{f(p)}$ son bixectivas, polo que se cumpren as seguintes propiedades:

- (a) f é inxectiva se, e soamente se, \tilde{f} é inxectiva.
- (b) f é sobrexectiva se, e soamente se, \tilde{f} é sobrexectiva.
- (c) f é bixectiva se, e soamente se, \tilde{f} é bixectiva; neste caso, f^{-1} é unha aplicación afín con aplicación lineal asociada $\widetilde{f^{-1}} = \tilde{f}^{-1}$.

Demostración. Para a composición das aplicacións lineais asociadas, observamos que

$$\widetilde{g \circ f} = \delta''_{g(f(p))} \circ (g \circ f) \circ \delta_p^{-1} = (\delta''_{g(f(p))} \circ g \circ \delta_{f(p)}^{-1}) \circ (\delta_{f(p)} \circ f \circ \delta_p^{-1}) = \tilde{g} \circ \tilde{f}.$$

- (a) Supoñamos que f é inxectiva. Para demostrar que \tilde{f} tamén o é, supoñamos que $\tilde{f}(u) = \tilde{f}(v)$; entón

$$f(p) + \tilde{f}(u) = f(p + u) = f(p + v) = f(p) + \tilde{f}(v),$$

o que quere dicir que $p + u = p + v$, ou o que é o mesmo, $u = v$. De xeito recíproco, se \tilde{f} é inxectiva e os puntos p e q cumpren $f(p) = f(q)$, pondo $q = p + v$, concluímos que $\tilde{f}(v) = 0$ e polo tanto $v = 0$ e $p = q$.

- (b) Supoñamos que f é sobrexectiva. Entón, para ver que \tilde{f} tamén o é, collemos $v \in E'$ e q' de xeito que $v = \mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{q}'$; como f é sobrexectiva, existe $q \in \mathbb{A}$ de xeito que $f(q) = q'$. Polo tanto, definindo $u = \mathbf{p}q$, temos que $\tilde{f}(u) = v$. Reciprocamente, supoñamos que \tilde{f} é sobrexectiva, e sexa $q' \in \mathbb{A}'$. Se $v = \mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{q}'$, existe u de xeito que $\tilde{f}(u) = v$, e podemos definir q como o único punto que cumpre $u = \mathbf{p}q$. Temos entón que $f(q) = q'$.

- (c) A primeira parte séguese de combinar os dous apartados anteriores. Para a segunda parte, sabemos xa que f^{-1} está ben definida porque f é bixectiva; ademais, \tilde{f} é bixectiva. Cómpre ver que é lineal e achar $\widetilde{f^{-1}}$. Fixamos como de costume un punto $p \in \mathbb{A}$ e tomamos tamén $f(p) \in \mathbb{A}'$. Entón, calquera outro punto en \mathbb{A}' pode escribirse como $f(q)$, con $q \in \mathbb{A}$, e se pomos $u = \mathbf{p}q$, entón $\tilde{f}(u) = \mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(q)$. Como \tilde{f} é bixectiva, calquera vector de E' pódese escribir como $\tilde{f}(u)$, polo que é suficiente probar que $\widetilde{f^{-1}}(\tilde{f}(u)) = \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u))$ para todo $u \in E$. Neste caso, $\widetilde{f^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(q)) = \mathbf{p}q = u$, e $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u)) = u$ por definición de aplicación inversa. Polo tanto $\widetilde{f^{-1}} = \tilde{f}^{-1}$ e a linealidade é automática.

□

A seguinte proposición explica que se precisa para determinar unha aplicación afín. En concreto, é suficiente con dar a imaxe dun punto e a parte correspondente á aplicación lineal. Alternativamente, se o espazo é de dimensión n , pódense dar as imaxes de $n + 1$ puntos independentes.

Proposición 2.1.3. As afinidades cumpren as seguintes propiedades.

- (a) Sexan $f, g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$. Entón, $f = g$ se, e soamente se, existe $p \in \mathbb{A}$ tal que $f(p) = g(p)$ e $\tilde{f} = \tilde{g}$.
- (b) Sexan $p \in \mathbb{A}$, $q \in \mathbb{A}'$ e $\varphi: E \rightarrow E'$ unha aplicación lineal. Entón, existe unha única afinidade tal que $f(p) = q$ e $\tilde{f} = \varphi$.
- (c) Supoñamos que $\dim \mathbb{A} = n$. Se p_1, \dots, p_{n+1} son puntos independentes de \mathbb{A} , entón dados puntos q_1, \dots, q_{n+1} de \mathbb{A}' , existe unha única afinidade $j: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ tal que $j(p_i) = q_i$.

Demostración. (a) Se $f = g$, entón $f(p) = g(p)$ e $f(p + u) = g(p + u)$ para todo $u \in E$, polo que $\tilde{f}(u) = \tilde{g}(u)$ para todo u . Do mesmo xeito, se $f(p) = g(p)$ para un certo p e $\tilde{f} = \tilde{g}$, podemos escribir para un q arbitrario $q = p + u$, de onde

$$f(q) = f(p) + \tilde{f}(u) = g(p) + \tilde{g}(u) = g(q).$$

- (b) Supoñamos que f e g cumprisen a propiedade. Entón, ambas coincidirían na parte lineal e na imaxe dun punto, e, polo apartado anterior, sabemos que serían iguais.
- (c) Para $i = 1, \dots, n$, pomos $u_i = p_i - p_{n+1}$. Fixar a imaxe de n vectores linealmente independentes e dun punto p_{n+1} determina a afinidade polo visto no apartado (b).

□

En particular, se \mathbb{A} e \mathbb{A}' son espazos afíns de dimensións n e n' , respectivamente, tense que $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}'$ se, e soamente se, $n = n'$. Isto demostra que tódolos espazos afíns sobre K de dimensión n son isomorfos a \mathbb{A}_K^n .

Imos discutir agora o comportamento das variedades lineais por unha aplicación afín.

Proposición 2.1.4. Sexa $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ unha aplicación afín.

- (a) A imaxe dunha variedade lineal afín por f é unha variedade lineal afín.
- (b) A imaxe inversa dunha variedade lineal afín por f é ou ben baleira ou ben unha variedade lineal afín. No segundo caso, se $W = q + G$, entón $f^{-1}(W) = f^{-1}(q + G) = p + \tilde{f}^{-1}(G)$, con $p \in f^{-1}(q + G)$.
- (c) Unha afinidade transforma variedades paralelas en variedades paralelas.
- (d) Unha afinidade transforma puntos aliñados en puntos aliñados.

Demostración. (a) Se $V = p + F$, entón $f(V) = f(p) + \tilde{f}(F)$, xa que $f(p + v) = f(p) + \tilde{f}(v)$.

- (b) Supoñamos que a preimaxe é non baleira e collamos un punto $p \in f^{-1}(q+G)$, que cumpre entón que $\mathbf{qf}(\mathbf{p}) \in G$. Ademais, un punto $r \in \mathbb{A}$ pertence a $f^{-1}(W)$ se, e soamente se, $\mathbf{qf}(\mathbf{r}) \in G$. Finalmente, $r \in \mathbb{A}$ pertence a $p + \tilde{f}^{-1}(G)$ se, e soamente se, $\tilde{f}(\mathbf{pr}) \in G$. Como $\tilde{f}(\mathbf{pr}) = \mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{q} + \mathbf{qf}(\mathbf{r})$, temos que $r \in f^{-1}(W)$ se, e soamente se, $r \in p + \tilde{f}^{-1}(G)$.
- (c) Sexa $V = p + F$ e $W = q + G$, onde supomos sen perda de xeneralidade que $F \subset G$. Entón, $f(V) = f(p) + \tilde{f}(F)$ e $f(W) = f(q) + \tilde{f}(G)$, e tense claramente que $\tilde{f}(F) \subset \tilde{f}(G)$.
- (d) Sexa $V = p + F$, con F de dimensión 1. Entón, $f(V) = f(p) + \tilde{f}(F)$. Tense que $\tilde{f}(F)$ é ou ben $\{0\}$ ou ben é de dimensión 1. □

Dos resultados anteriores, séguese tamén que as afinidades respectan as interseccións e as sumas de variedades lineais afíns.

Afinidades e razón simple

No seguinte resultado imos establecer que as aplicacións afíns conservan a razón simple. De agora en adiante, imos restrinxirnos na maioría de casos á situación na que f é bixectiva, porque senón a razón simple podería non estar ben definida. Por exemplo, se f é a aplicación constante

Proposición 2.1.5. As afinidades bixectivas conservan a razón simple.

Demostración. Sexa $r = p + \lambda\mathbf{pq}$. Entón,

$$\begin{aligned} f(r) &= f(p) + \tilde{f}(\lambda\mathbf{pq}) \\ &= f(p) + \lambda(f(q) - f(p)) \\ &= f(p) + \lambda\mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Polo tanto, λ é a razón simple de $f(p)$, $f(q)$ e $f(r)$. □

Definición 2.1.2. Unha aplicación $g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ é unha *colineación* se a imaxe $g(L)$ de calquera recta L de \mathbb{A} por g está incluída nunha recta L' de \mathbb{A}' .

Teorema 2.1.1. Sexa K un corpo de característica diferente de 2. Unha aplicación bixectiva f é unha afinidade se, e soamente se, conserva as colinealidades e a razón simple.

Demostración. Unha implicación xa se demostrou. Supoñamos agora que f conserva as colinealidades e a razón simple. Temos que ver que, fixado $p \in \mathbb{A}$, a aplicación

$$\tilde{f}: E \longrightarrow E', \quad u \mapsto \tilde{f}(u) = \mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(\mathbf{q})$$

é lineal. Isto quere dicir que $\tilde{f}(u+v) = \tilde{f}(u) + \tilde{f}(v)$ e $\tilde{f}(\lambda u) = \lambda\tilde{f}(u)$. Pomos entón $u = \mathbf{pq}_1$ e $v = \mathbf{pq}_2$.

Comezamos vendo que $\tilde{f}(\lambda u) = \lambda\tilde{f}(u)$. A fórmula é obviamente certa se $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ ou $v = 0$, polo que suporemos que ese non é o caso. Se $u = \mathbf{pq}$, entón existe un único t tal que $\lambda v = \mathbf{pt}$. Como os puntos son diferentes, os puntos p , q e t son diferentes e se $(p, q, t) = \lambda$, tamén se ten que $(f(p), f(q), f(t)) = \lambda$. Nese caso,

$$\tilde{f}(\lambda v) = \tilde{f}(\mathbf{pt}) = \mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{p})\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \lambda\tilde{f}(v).$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} u = \mathbf{pq} \\ \xrightarrow{\quad} \\ p \quad q \quad t \end{array} & \begin{array}{c} \lambda u = \mathbf{pt} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \quad \quad \quad t \end{array} & \xrightarrow{f} \\
 \begin{array}{c} \tilde{f}(u) \\ \xrightarrow{\quad} \\ f(p) \quad f(q) \quad f(t) \end{array} & & \begin{array}{c} \tilde{f}(\lambda u) \\ \xrightarrow{\quad} \\ \quad \quad \quad f(t) \end{array}
 \end{array}$$

Vemos agora que $\tilde{f}(u+v) = \tilde{f}(u) + \tilde{f}(v)$. Se u ou v é cero o resultado é claro. Entón, podemos pór $u = \mathbf{pq}$, $v = \mathbf{pr}$ e $u+v = \mathbf{ps}$. Observamos que

$$\mathbf{qs} = \mathbf{qp} + \mathbf{ps} = -u + u + v = \mathbf{pr}.$$

De xeito análogo,

$$\mathbf{rs} = \mathbf{rp} + \mathbf{pq} + \mathbf{qs} = -u + u + v = \mathbf{pq}.$$

Definimos o punto $t = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r$. Empregando as relacións anteriores, temos que $t = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}s$ (dito doutro xeito, as diagonais dun paralelogramo intersecan nos puntos medios). Supoñamos que $q \neq r$ e que $p \neq s$, o que é equivalente a dicir que $u \neq \pm v$. Nese caso, ten sentido falar de razón simple e temos que

$$(p, s, t) = (q, r, t) = \frac{1}{2}.$$

Como a aplicación f conserva as colineacións e as razóns simples, temos que

$$(f(p), f(s), f(t)) = (f(q), f(r), f(t)) = \frac{1}{2},$$

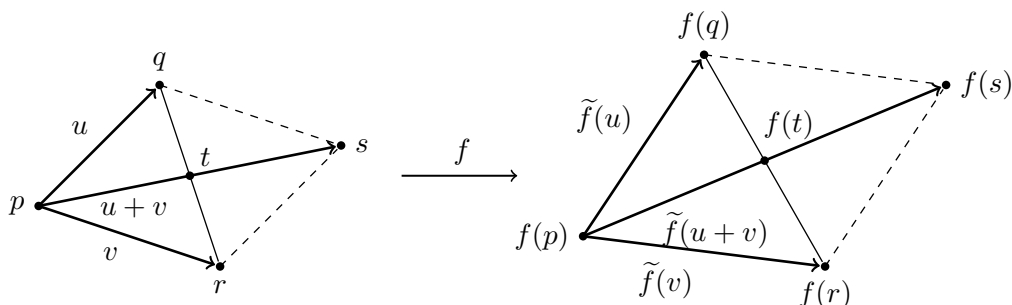
e de aquí dedúcese que

$$f(t) = \frac{1}{2}f(q) + \frac{1}{2}f(r) = \frac{1}{2}f(p) + \frac{1}{2}f(s).$$

A última igualdade implica que $\mathbf{f(q)f(s)} = \mathbf{f(p)f(r)}$.

Temos entón que

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(u+v) &= \tilde{f}(\mathbf{ps}) \\
 &= \mathbf{f(p)f(s)} \\
 &= \mathbf{f(p)p(q)} + \mathbf{f(q)f(s)} \\
 &= \mathbf{f(p)f(q)} + \mathbf{f(p)f(r)} \\
 &= \tilde{f}_p(u) + \tilde{f}_p(v).
 \end{aligned}$$



Isto demostra que \tilde{f} conserva a suma de vectores cando os vectores non son iguais nin opostos. Se $u = v$, polo resultado que establecemos sobre a multiplicación por escalares temos que $f(2u) = 2f(u)$; e se $u = -v$, entón $f(-u) = -f(u)$, tamén polo mesmo motivo. \square

De feito, podemos demostrar un teorema máis forte que afirma que é suficiente con conservar as colinealidades se permitimos a composición con automorfismos do corpo. Imos introducir notación alxébrica antes de precisar o teorema.

Definición 2.1.3. Sexa K un corpo. Un automorfismo de K é unha aplicación bixectiva $\sigma: K \rightarrow K$ de maneira que $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ e $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Exemplo. A identidade é sempre un automorfismo. Se $K = \mathbb{C}$, a conxugación complexa $z \mapsto \bar{z}$ é un automorfismo. Tamén hai automorfismos non triviais nos corpos de p^r elementos, con $r > 1$, e que se denotan por \mathbb{F}_{p^r} . Estes corpos, que se obteñen por medio dun cociente de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, teñen un grupo de automorfismos de cardinalidade r . Se \mathbb{F}_{p^r} é un corpo de p^r elementos, o *endomorfismo de Frobenius* dado por $x \mapsto x^p$ é un automorfismo do corpo, que cando $r > 1$ é diferente da identidade.

Definición 2.1.4. Sexan E_1 e E_2 dous K -espazos vectoriais. Unha aplicación $\tilde{f}: E_1 \rightarrow E_2$ dise que é *semilineal* se existe un automorfismo σ de K de xeito que $\tilde{f}(u + v) = \tilde{f}(u) + \tilde{f}(v)$ para todo $u, v \in E_1$; e $\tilde{f}(\lambda u) = \sigma(\lambda)\tilde{f}(u)$ para $\lambda \in K$ e $u \in E_1$. Unha aplicación $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ entre dous espazos afíns é unha *semiafinidade* se $\tilde{f}_P: E_1 \rightarrow E_2$ inducida por f e por un punto $P \in \mathbb{A}_1$ é semilineal.

O seguinte teorema adoita coñecerse como *teorema fundamental da xeometría afín*. Pospoñemos a súa demostración ata a última parte do tema.

Teorema 2.1.2 (Teorema fundamental da Xeometría Afín). Sexan \mathbb{A}_1 e \mathbb{A}_2 dous espazos afíns sobre os K -espazos vectoriais E_1 e E_2 , respectivamente, da mesma dimensión n , con $n \geq 2$. Supoñamos que $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sexa $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ unha colineación bixectiva. Entón f é unha semiafinidade.

En calquera caso, enfatizamos que nos casos de \mathbb{Q} , \mathbb{R} e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, con p un primo impar, semiafinidade é o mesmo que afinidade.

Proposición 2.1.6. O único automorfismo de \mathbb{Q} e de \mathbb{R} é a identidade. En particular, nestes casos unha semiafinidade é unha afinidade.

Demostración. Como $\sigma(0) = \sigma(0 + 0) = 2\sigma(0)$, temos que $\sigma(0) = 0$. Por outra banda, $\sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = \sigma(1)^2$ e da bixectividade de σ , temos que $\sigma(1) = 1$. Temos tamén que $\sigma(n) = n\sigma(1) = n$ e que $m\sigma(1/m) = 1$, polo que $\sigma(1/m) = m$. Combinando estas propiedades temos que $\sigma(q) = q$ para todo q racional. Por outro lado, $\sigma(\epsilon^2) = \sigma(\epsilon)^2 > 0$, polo que a imaxe de calquera número positivo é positivo; en particular,

$$\sigma(m + \epsilon) - \sigma(m) = \sigma(m + \epsilon) + \sigma(-m) = \sigma(\epsilon) > 0,$$

polo que a función é estritamente crecente.

Supoñamos agora que existe un número real r para o cal $f(r) - r > 0$ (o caso no que é menor que 0 é análogo). En particular, existe $\epsilon > 0$ tal que $f(r) > r + \epsilon$. Collemos entón un número racional q no intervalo $(r, r + \epsilon)$, que polo tanto cumpre que $r < q = f(q) < f(r)$. Iso é unha contradición co feito de que f sexa estritamente crecente. \square

O mesmo sucede para o caso dos corpos da forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, xa que ao fixar o 1, necesariamente fixan o resto de elementos.

Imos rematar amosando un exemplo de colineación que non é unha afinidade, no caso de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Para iso, poñamos

$$\begin{array}{rcl}
 f: & \mathbb{A} & \longrightarrow \mathbb{A} \\
 & (0, 0, 0) & \longmapsto (0, 0, 0) \\
 & (1, 0, 0) & \longmapsto (1, 0, 1) \\
 & (1, 1, 0) & \longmapsto (1, 1, 1) \\
 & (0, 1, 0) & \longmapsto (0, 1, 1) \\
 & (0, 0, 1) & \longmapsto (0, 0, 1) \\
 & (1, 0, 1) & \longmapsto (1, 0, 0) \\
 & (1, 1, 1) & \longmapsto (1, 1, 0) \\
 & (0, 1, 1) & \longmapsto (0, 1, 0)
 \end{array}$$

2.2. Proxectividades: definición e propiedades

Sexan (\mathbb{P}, E, π) e (\mathbb{P}', E', π') dous espazos proxectivos.

Definición 2.2.1. Unha *proxectividade* é unha aplicación $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ inducida por un isomorfismo de espazos vectoriais $\varphi: E \rightarrow E'$, é dicir, $f = [\varphi]$. Unha *homografía* é unha proxectividade $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$.

Podemos facer unha definición similar no caso no que φ non é inxectiva, pero entón f só está definida sobre as clases nas que φ é non cero. Para indicarmos isto, poremos $f: \mathbb{P} \dashrightarrow \mathbb{P}$, é dicir, a frecha con trazo discontinuo indica que o dominio de f non é todo \mathbb{P} . Escribimos $Z(f) = \mathbb{P}(\ker(f))$. Porén, mentres non se diga o contrario, sexa $f = [\varphi]: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ unha proxectividade definida polo isomorfismo $\varphi: E \rightarrow E'$.

Proposición 2.2.1. Sexa $L = [F]$ unha variedade lineal proxectiva de \mathbb{P} . Entón:

- (a) $f(L) = [\varphi(F)]$ é unha variedade lineal proxectiva de \mathbb{P}' e $\dim f(L) = \dim L$.
- (b) $f|L: L \rightarrow f(L)$ é a proxectividade inducida por $\varphi|F: F \rightarrow \varphi(F)$, $f|L = [\varphi|F]$.

Demostración. (a) Temos que a imaxe dun subespazo vectorial por unha aplicación lineal é un subespazo vectorial. Ademais, como φ é inxectiva, a dimensión é a mesma.

- (b) Inmediato a partir da definición de proxectividade. □

A seguinte proposición resume algunhas das propiedades das proxectividades, que son análogas ás que se cumpren no caso das afinidades.

Proposición 2.2.2. Sexan L_1 e L_2 variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} , e $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{P}$. Entón:

- (a) $L_1 \subset L_2$ se, e soamente se, $f(L_1) \subset f(L_2)$.
- (b) $f(L_1 \cap L_2) = f(L_1) \cap f(L_2)$.
- (c) $f(L_1 \vee L_2) = f(L_1) \vee f(L_2)$.
- (d) $f(q_1 \vee \dots \vee q_m) = f(q_1) \vee \dots \vee f(q_m)$.

- (e) Os puntos $q_0, \dots, q_m \in \mathbb{P}$ son independentes se, e soamente se, $f(q_0), \dots, f(q_m) \in \mathbb{P}'$ son independentes.

Demostración. Tódalas propiedades son inmediatas a partir dos resultados correspondentes a nivel de subespazos vectoriais. \square

Definición 2.2.2. Unha aplicación $g: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ é unha *colineación* se a imaxe $g(L)$ de calquera recta L de \mathbb{P} por g está incluída nunha recta L' de \mathbb{P}' . No caso de que g sexa inxectiva, iso é equivalente a $g(q_1 + q_2) \subset g(q_1) + g(q_2)$, para todo parella de puntos diferentes $q_1, q_2 \in \mathbb{P}$.

Proxectividades e razón dobre

Polos resultados anteriores, sabemos que as proxectividades son colineacións. En cambio, colineación non implica proxectividade e precisamos impor algunha condición adicional. Do mesmo xeito que as afinidades se podían definir dicindo que eran colineacións que preservaban a razón simple, neste caso procederemos de xeito análogo coa razón dobre.

Proposición 2.2.3. As proxectividades conservan a razón dobre.

Demostración. En primeiro lugar, observamos que se \mathcal{R} é unha referencia de \mathbb{P} , entón $f(\mathcal{R})$ é unha referencia de \mathbb{P}' . En efecto, se $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ é unha referencia de \mathbb{P} , entón $f(\mathcal{R}) = \{f(p_1), \dots, f(p_{n+1}); f(U)\}$. Calquera subconxunto de $n + 1$ puntos de \mathcal{R} é linealmente independente, polo que a imaxe tamén o será, de xeito que $f(\mathcal{R})$ é unha referencia proxectiva de \mathbb{P}' .

A continuación, temos que, se \mathcal{B}_u é unha base adaptada a \mathcal{R}' , entón $\varphi(\mathcal{B}_u)$ é unha base adaptada a $f(\mathcal{R})$. Iso é así xa que $\{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_{n+1})\}$ é unha base de E' . Ademais, $U' = f(U) = [\varphi][u_1 + \dots + u_{n+1}]$, polo que $\varphi(\mathcal{B}_u)$ é unha base adaptada a \mathcal{R}' .

De aquí dedúcese que se $p \in \mathbb{P}$ ten coordenadas $[x_1 : \dots : x_{n+1}]$ en \mathcal{R} , entón $f(p)$ ten coordenadas $[x_1 : \dots : x_{n+1}]$ en $f(\mathcal{R})$.

Finalmente, temos que se $L := q_1 \vee q_2 \vee q_3 \vee q_4$ é unha recta, entón, $f(L)$ tamén é unha recta. Se \mathcal{R} é unha referencia de L e $[x_i : y_i]$ son as coordenadas de q_i en \mathcal{R} , entón $f(\mathcal{R})$ é unha referencia de $f(L)$ e $[x_i : y_i]$ son as coordenadas de $f(q_i)$ en $f(\mathcal{R})$. Polo tanto, a razón dobre consérvase, xa que unicamente depende das coordenadas dos puntos, con independencia do sistema de referencia. \square

Esta demostración é análoga á que realizamos no caso da razón simple, na que implicitamente tamén estabamos a usar que se conservaban as coordenadas dos puntos; porén, naquel caso, o contexto era especialmente simple e por iso se podía reinterpretar empregando a notación vectorial habitual.

Imos ver agora como dar as imaxes dunha referencia determina completamente a proxectividade. Isto é análogo ao que sucedía no caso afín, no que unha afinidade viña determinada pola imaxe de $n + 1$ puntos independentes ou de n vectores e un punto; no proxectivo, iso equivale a fixar a imaxe de $n + 1$ puntos.

Proposición 2.2.4. Existe unha única proxectividade $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ con $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. En particular, se $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ é unha homografía que envía unha base en si mesma, é a identidade.

Demostración. Se $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ é unha base adaptada a \mathcal{R} e $\mathcal{B}'_u = \{u'_1, \dots, u'_{n+1}\}$ é unha base adaptada a \mathcal{R}' , existe un único isomorfismo $\varphi: E \rightarrow E'$ de xeito que

$\varphi(u_i) = u'_i$ para todo $i = 1, \dots, n+1$. En particular, $\varphi(u_1 + \dots + u_{n+1}) = u'_1 + \dots + u'_{n+1}$. Sexa $f = [\varphi]: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$. Entón, $f(p_i) = [\varphi(u_i)] = [u'_i] = p'_i$ e $f(U) = U'$. Deste xeito, para $f = [\varphi]$ tense que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$.

Supoñamos agora que $g = [\psi]$ é outra proxectividade tal que $g(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. Entón $[u'_i] = [\psi(u_i)]$, polo que existe un λ_i de xeito que $\psi(u_i) = \lambda_i u'_i$. Polo tanto, $\psi(u_1 + \dots + u_{n+1}) = \lambda_1 u'_1 + \dots + \lambda_{n+1} u'_{n+1}$, e para ter que $g(U) = U'$ tense que cumprir entón que exista un λ de xeito que $\lambda = \lambda_i$. Isto demostra que $\psi = \lambda\varphi$, polo que $g = f$. \square

Exemplo. No caso de dimensión 1, unha proxectividade vén determinada pola imaxe de 3 puntos, mentres que no caso afín eran suficientes 2 puntos. É dicir, se no caso proxectivo impomos que $f([0 : 1]) = [0 : 1]$ e que $f([1 : 1]) = [1 : 1]$ (isto é, que o 0 e o 1 sexan fixos), a proxectividade non queda totalmente determinada. A identidade cumpreo, pero por exemplo a aplicación $f([x : y]) = [2x : x + y]$ tamén. Esta aplicación pode interpretarse como enviar un punto afín $x \neq -1$ a $\frac{2x}{x+1}$; o -1 a ∞ e o ∞ a 2. Máis en xeral, calquera proxectividade que cumpra esas dúas condicións é ou ben a identidade ou da forma $f([x : y]) = [ax : x + (a - 1)y]$, con $a \neq 0, 1$.

Imos establecer agora que no caso de dimensión un a condición de demostrar a razón dobre é suficiente para termos unha proxectividade. A demostración baséase en que as proxectividades conservan a razón simple e no resultado anterior sobre a determinación dunha proxectividade.

Proposición 2.2.5. Sexa $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ unha aplicación entre dúas rectas proxectivas. Entón, f é unha proxectividade se, e soamente se, f conserva a razón dobre.

Demostración. Unha implicación xa se demostrou. Sexa $\mathcal{R} = \{p_1, p_2; U\}$ unha referencia de \mathbb{P} e p un punto de \mathbb{P} distinto dos tres da referencia. Por hipótese

$$(f(p_1), f(p_2), f(U), f(p)) = (p_1, p_2, U, p) \neq 0, 1, \infty.$$

Deste xeito, as imaxes dos catro puntos son diferentes e $f(\mathcal{R}) = \{f(p_1), f(p_2); f(U)\}$ é unha referencia de \mathbb{P}' . Sabemos tamén que existe unha única proxectividade $g: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ tal que $g(\mathcal{R}) = f(\mathcal{R})$. Como f e g conservan a razón dobre, entón

$$(f(p_1), f(p_2); f(U), f(p)) = (g(p_1), g(p_2); g(U), g(p)),$$

polo que $f(p) = g(p)$ e f é unha proxectividade. \square

Podemos enunciar finalmente o teorema análogo ao que vimos no caso afín: unha colineación bixectiva que conserva a razón dobre é unha proxectividade. A demostración é bastante longa, polo que a dividiremos en varios pasos; os primeiros consistirán na realización de certas observacións preliminares, que logo permitirán desenvolver a proba.

Teorema 2.2.1. Sexa $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ unha aplicación entre dous espazos proxectivos de dimensión $n \geq 1$. Sexa $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ unha referencia de \mathbb{P} e $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ unha base adaptada. Entón, f é unha proxectividade se, e soamente se, f é unha colineación bixectiva que conserva a razón dobre.

Demostración. Unha implicación xa se estableceu. Para demostrar o recíproco, imos comezar realizando as seguintes observacións.

- (i) Se $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ é unha colineación que conserva a razón dobre e L é unha recta de \mathbb{P} , entón $f(L)$ é unha recta de \mathbb{P}' e $f|_L$ é bixectiva.

- (ii) Se q_1, \dots, q_r son puntos de \mathbb{P} , entón $f(q_1 \vee \dots \vee q_r) = f(q_1) \vee \dots \vee f(q_r)$.
- (iii) Se $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{P}$ son puntos independentes, entón as súas imaxes tamén o son (en particular, a imaxe dunha referencia é unha referencia).
- (iv) Se L é unha variedade lineal de \mathbb{P} , entón $f(L)$ é unha variedade lineal de \mathbb{P}' da mesma dimensión.
- (v) Se H_i é o hiperplano dado por $x_i = 0$, entón $f(H_i)$ é o hiperplano xerado por tódolos puntos $f(p_j)$ salvo $f(p_i)$.
- (vi) Se $U_i = [u_1 + \dots + \hat{u}_i + \dots + u_{n+1}]$, entón $\mathcal{R}_i = \{p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{n+1}; U\}$ é unha referencia de H_i e $\{u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{n+1}\}$ é unha base adaptada.

Imos discutir a demostración de cada un dos pasos.

- (i) En efecto, como f é unha colineación, $f(L) \subset L'$. Polo resultado anterior, sabemos que $f|L$ é unha proxectividade e polo tanto é bixectiva, o que quere dicir que a imaxe ten que ser unha recta.
- (ii) Para demostrar a igualdade do enunciado, temos que ver as dúas inclusións. De cara a establecer que $f(q_1 \vee \dots \vee q_r) \subset f(q_1) \vee \dots \vee f(q_r)$, procedemos por indución en $r \geq 1$, sendo obvio o resultado para $r = 1$. Se $r = 2$, é a definición de colineación, polo que imos supoñer que $r \geq 3$. Sexa $q \in q_1 \vee \dots \vee q_r = [\langle u_1, \dots, u_r \rangle]$, onde $q_i = [u_i]$. Deste xeito, $q = [x]$, con $x = \sum_{i=1}^r x_i u_i$ e non todos os x_i son 0. Reordenando os termos, podemos supor que $x_i \neq 0$ e pomos $v = \sum_{i=2}^r x_i u_i$. Se $v = 0$, entón $q = q_1$ e $f(q) \in f(q_1) \vee \dots \vee f(q_r)$. Se $v \neq 0$, entón $[v] \in [\langle u_2, \dots, u_r \rangle] = q_2 \vee \dots \vee q_r$ e, por hipótese, $f([v]) \subset f(q_2) \vee \dots \vee f(q_r)$. Deste xeito, $q = [x_1 u_1 + v] \in q_1 \vee [v]$. Como f é colineación, entón $f(q) \in f(q_1) \vee f([v])$, e como $f([v]) \in f(q_2) \vee \dots \vee f(q_r)$, entón $f(q) \subset f(q_1) \vee \dots \vee f(q_r)$.

Para a inclusión oposta, ímonos restrinxir primeiro ao caso no que os q_i son independentes. Sexa $b \in f(q_1) \vee \dots \vee f(q_r) \subset f(\mathbb{P})$. Entón, $b = f(q)$, con $q \in \mathbb{P}$. Se $q \notin q_1 \vee \dots \vee q_r$, entón podemos atopar q_{r+1}, \dots, q_n de xeito que q, q_1, \dots, q_n son $n + 1$ puntos independentes e $\mathbb{P} = q \vee q_1 \vee \dots \vee q_n$. Polo que acabamos de probar, $\mathbb{P}' = f(\mathbb{P}) \subset f(q) \vee f(q_1) \vee \dots \vee f(q_n)$. Como $f(q) = b \in f(q_1) \vee \dots \vee f(q_r)$, entón $\mathbb{P}' \subset f(q_1) \vee \dots \vee f(q_n)$, o que é unha contradición xa que a dimensión de \mathbb{P}' é n . Polo tanto, $q \in q_1 \vee \dots \vee q_r$ e $b = f(q) \in f(q_1 \vee \dots \vee q_r)$.

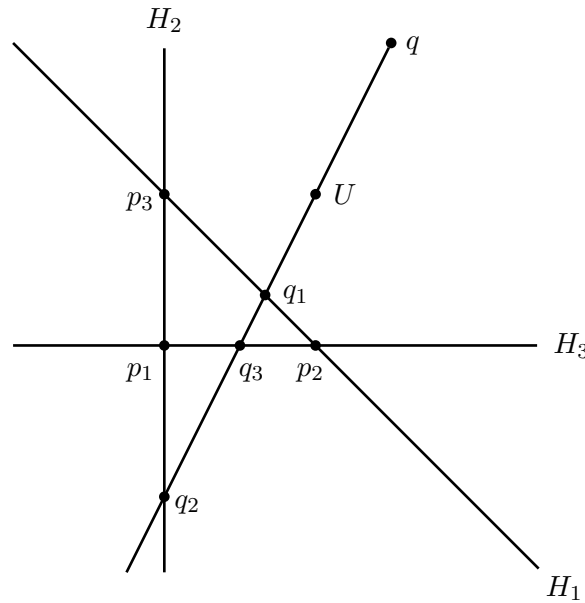
Para demostrar o resultado, reordenando, podemos supoñer que q_1, \dots, q_s son independentes e $q_{s+1}, \dots, q_r \in q_1 \vee \dots \vee q_s$. Entón, $f(q_1 \vee \dots \vee q_s) = f(q_1) \vee \dots \vee f(q_s)$ e polo tanto para $i = s + 1, \dots, r$ temos que $f(q_i) \in f(q_1) \vee \dots \vee f(q_s)$, e podemos entón concluír.

- (iii) Se q_1, \dots, q_r son independentes, entón $f(q_1), \dots, f(q_r)$ son independentes xa que se, por exemplo, $f(q_1) \in f(q_2) \vee \dots \vee f(q_r) = f(q_2 \vee \dots \vee q_r)$, entón $f(q_1) = f(p)$, con $p \in q_2 \vee \dots \vee q_r$. Como f é inxectiva, iso implicaría que $q_1 = p \in q_2 \vee \dots \vee q_r$, o que é unha contradición. Que $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ sexa unha referencia de \mathbb{P} quere dicir que calquera subconxunto de $n + 1$ puntos de \mathcal{R} é independente. Polo que acabamos de ver, calquera subconxunto de $n + 1$ puntos de $f(\mathcal{R})$ é independente. Polo tanto, $f(\mathcal{R})$ é unha referencia de \mathbb{P}' .
- (iv) Se L é unha variedade lineal de \mathbb{P} de dimensión s , entón $L = q_1 \vee \dots \vee q_{s+1}$, para algúns $q_1, \dots, q_{s+1} \in \mathbb{P}$ independentes. Polo tanto, $f(L) = f(q_1 \vee \dots \vee q_{s+1}) =$

$f(q_1) \vee \cdots \vee f(q_{s+1})$ é unha variedade lineal de \mathbb{P}' . Polo apartado anterior, os puntos son independentes e a dimensión de $f(L)$ é s .

- (v) Sexa H_i o hiperplano $H_i = p_1 \vee \cdots \vee \hat{p}_i \vee \cdots \vee p_{n+1}$. Polo visto nos apartados anteriores, $f(H_i) = f(p_1) \vee \cdots \vee \widehat{f(p_i)} \vee \cdots \vee f(p_{n+1})$, e iso proba que a dimensión de $f(H_i)$ é $n - 1$.
- (vi) Por hipótese, os puntos $p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n$ son puntos independentes de $H_i := p_1 \vee \cdots \vee \hat{p}_i \vee \cdots \vee p_{n+1}$, onde $p_j = [u_j]$ e $U_i = [u_1 + \dots + \hat{u}_i + \dots + u_n] \in H_i$. Deste xeito, $\mathcal{R}_i = \{p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{n+1}; U_i\}$ é unha referencia de H_i , e $\{u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{n+1}\}$ é unha base adaptada. Por outro lado, $\langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{n+1} \rangle \cap \langle u_i, \sum_{j=1}^{n+1} u_j \rangle$ contén o subespazo $\langle u_1 + \dots + \hat{u}_i + \dots + u_{n+1} \rangle$. Pola fórmula de Grassmann, temos que os dous subespazos son iguais. Polo tanto, $\{U_i\} = \{[u_1 + \dots + \hat{u}_i + \dots + u_n]\} = H_i \cap (p_i \vee U)$. Como f é inxectiva, $f(H_i \cap (p_i \vee U)) = f(H_i) \cap f(p_i \vee U)$. Polo visto antes, $f(p_i \vee U) = f(p_i) \vee f(U)$. Isto demostra que $\{f(U_i)\} = f(H_i) \cap (f(p_i) \vee f(U))$.

Con isto podemos realizar a proba por indución sobre $n = \dim \mathbb{P}$. Para $n = 1$ xa o vimos, así que supoñamos que $n \geq 2$. O seguinte debuxo ilustra a idea principal da indución: temos tres hiperplanos, H_1 , H_2 e H_3 , e na restrición a eles sabemos que o resultado é certo. Dado un punto q , podemos trazar a recta que pasa por U e considerar os puntos de cortes cos hiperplanos, e traballar sobre eles para concluír.



Sexa $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ unha referencia de \mathbb{P} e $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ unha base adaptada. Entón, $f(\mathcal{R})$ é unha referencia de \mathbb{P}' , e sabemos que existe unha única proxectividade $g: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ de xeito que $g(\mathcal{R}) = f(\mathcal{R})$. Se vemos que $f = g$ teremos que f é unha proxectividade.

Sexa H_i o hiperplano xerado polos p_j excepto o p_i , e definimos o punto unidade $U_i = [u_1 + \dots + \hat{u}_i + \dots + u_{n+1}]$ e o sistema de referencia $\mathcal{R}_i = \{p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{n+1}; U_i\}$. Entón, \mathcal{R}_i é unha referencia de H_i , e como f e g coinciden sobre \mathcal{R} , temos que $f(H_i) = g(H_i)$. Polo tanto, $f(U_i) = g(U_i)$; é dicir, f e g coinciden sobre \mathcal{R}_i . Se f_i e g_i son as restricións de f e g sobre H_i ; f_i é unha colineación e conserva as razóns dobres, e, pola hipótese de indución, é unha proxectividade. Concluimos entón que $f_i = g_i$.

Sexa $q \in \mathbb{P}$, con $q \notin H_i$. As coordenadas de q en \mathcal{R} son $[(x_1, \dots, x_{n+1})]$, con $x_i \neq 0$ para todo i , e distinto tamén do punto unidade. Sexa $L = q \vee U$. Pola fórmula de Grassmann, $L \cap H_i = \{q_i\}$. Ademais, $U \neq q_1, q_{n+1}$ xa que $U \notin H_1, H_{n+1}$ e $q_1 \in H_1$ e $q_{n+1} \in H_{n+1}$. Os puntos $q, q_1, \dots, q_{n+1}, U$ están aliñados en $L = q \vee U$, polo que $f(q), f(q_1), \dots, f(q_{n+1}), f(U)$ están aliñados en $f(L)$. Como f é inxectiva, entón $\mathcal{S} = \{f(q_1), f(q_n); f(U)\}$ é unha referencia de $f(L)$. Como $f_i = g_i$ e $f(U) = g(U)$, entón $\theta_{\mathcal{S}}(f(q)) = \theta_{\mathcal{S}}(g(q))$, onde como é habitual $\theta_{\mathcal{S}}$ refírese á coordenada absoluta na referencia \mathcal{S} . Pola bixectividade de $\theta_{\mathcal{S}}$, $f(q) = g(q)$. Deste xeito, $f = g$ é unha proxectividade. \square

Exemplo. No seguinte exemplo, amosamos un exemplo representativo de proxectividade que non é unha afinidade. Será o que se coñeza como perspectividade.

- (a) No plano afín \mathbb{A}^2 , sexa ℓ_1 a recta vertical $x = 0$, e sexa ℓ_2 a recta horizontal $y = 0$. Consideremos o punto $P = (1, 1)$. En particular, non se pode definir unha aplicación simplemente como

$$\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2, \quad Q \mapsto PQ \cap \ell_2.$$

A razón é que a aplicación φ non está definida no punto $(0, 1)$; non hai ningunha maneira de enviar este punto a calquera da recta, pois teriamos unha aplicación sobrexectiva entre dous espazos afíns de dimensión un que non é inxectiva, o cal non é posible.

- (b) En calquera caso, para estudar o comportamento da razón simple e da razón dobre, consideremos a aplicación do apartado anterior, definida en $\ell_1 \setminus \{(0, 1)\}$ por

$$\varphi : \ell_1 \setminus \{(0, 1)\} \longrightarrow \ell_2, \quad Q \mapsto PQ \cap \ell_2.$$

Dados os puntos $A = (0, a)$, $B = (0, b)$ e $C = (0, c)$, podemos ver que a razón simple $(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C))$ non coincide con (A, B, C) . Temos que $\varphi(A) = \frac{a}{a-1}$, $\varphi(B) = \frac{b}{b-1}$ e $\varphi(C) = \frac{c}{c-1}$, co cal

$$(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)) = \frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-1}{a-1}.$$

En concreto, a razón simple só se conserva cando $b = c$.

- (c) Fixados catro puntos A, B, C, D , si temos que $(A, B, C, D) = (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D))$ No caso da razón dobre tense que

$$(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)) = (A, B, C, D).$$

Traballando con coordenadas proxectivas, temos que $P = [1 : 1 : 1]$ e que un punto calquera $[0 : a : b]$ da recta $\ell_1 : x = 0$ ten por imaxe o punto $[a : 0 : a - b]$. Por tanto, tomando as bases $\{e_2, e_3\}$ e $\{e_1, e_3\}$ temos que a matriz da aplicación lineal é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ademais, a aplicación φ pode estenderse a toda a recta ℓ_1 enviando o punto $(0, 1)$ ao punto do infinito de ℓ_2 e o punto do infinito de ℓ_1 ao $(1, 0)$.

Ao igual que no caso afín, a condición sobre a razón dobre non é necesaria se permitimos automorfismos do corpo.

Teorema 2.2.2 (Teorema fundamental da Xeometría Proxectiva). Sexan \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 dous espazos afíns sobre os K -espazos vectoriais E_1 e E_2 , respectivamente, da mesma dimensión n , con $n \geq 2$. Supoñamos que $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sexa $f: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$ unha colineación bixectiva. Entón f é unha semiafinidade.

Afinidades e proxectividades

Sexan \mathbb{A}_1 e \mathbb{A}_2 dous espazos afíns e $\bar{\mathbb{A}}_1$ e $\bar{\mathbb{A}}_2$ as súas clausuras proxectivas. Dada unha afinidade bixectiva $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$, pódese estender a unha proxectividade $\bar{f}: \bar{\mathbb{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ que *coincide* nos puntos afíns e *preserva* os puntos do infinito. Reciprocamente, dada unha proxectividade $g: \bar{\mathbb{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ tal que $g(\mathbb{A}_{1,\infty}) \subset \mathbb{A}_{2,\infty}$ podémola restrinxir a unha afinidade bixectiva $g|_{\mathbb{A}_1}: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$.

Proposición 2.2.6. Dada unha afinidade bixectiva $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$, pódese estender a unha proxectividade $\bar{f}: \bar{\mathbb{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ que *coincide* nos puntos afíns e *preserva* os puntos do infinito.

Demostración. Nun sistema de referencia fixado, a afinidade escríbese como $y = Ax + b$, onde $A \in \text{GL}_n(K)$ e $b \in K^n$. Sexa $\bar{y} = (y, 1) \in K^{n+1}$, $x = (x, 1) \in K^{n+1}$ e $\bar{A} \in \text{GL}_{n+1}(K)$ a matriz dada por

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

Podemos definir entón a proxectividade $\bar{f}: \bar{\mathbb{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ dada por $[\bar{y}] = [\bar{A}][x]$. Cando a última coordenada de x é 0, tamén é 0 a última coordenada de y , polo que $\bar{f}(\mathbb{A}_{1,\infty}) \subset \mathbb{A}_{2,\infty}$. Ademais, se a última coordenada de x é non 0 tamén o será a última coordenada de y , polo que $\bar{f}(\mathbb{A}_1) \subset \mathbb{A}_2$ e $\bar{f}|_{\mathbb{A}_1} = f$. \square

Proposición 2.2.7. Dada unha proxectividade $g: \bar{\mathbb{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ tal que $g(\mathbb{A}_{1,\infty}) \subset \mathbb{A}_{2,\infty}$ podémola restrinxir a unha afinidade bixectiva $g|_{\mathbb{A}_1}: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$.

Demostración. As ecuacións da proxectividade veñen dadas por $[\bar{y}] = [\bar{A}][x]$, onde $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$, $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $\bar{A} = (a_{i,j})$. Como $g(\mathbb{A}_{1,\infty}) \subset \mathbb{A}_{2,\infty}$, iso quere dicir que cando $x_{n+1} = 0$, entón $y_{n+1} = 0$. Polo tanto, $\sum_{i=1}^n a_{n+1,i}x_i = 0$ para calquera elección de (x_1, \dots, x_n) de xeito que non todos sexan nulos. En particular, facendo que un deles sexa 1 e o resto cero deducimos que $a_{n+1,i} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Como o determinante da matriz é non nulo, $a_{n+1,n+1} \neq 0$ e podemos supor que é igual a 1. Se pomos $b = (a_{1,n+1}, \dots, a_{n,n+1})$ e restrinximos a $x_0 = 1$, obtemos a afinidade

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

\square

Exemplo. Dada a afinidade $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ definida por $f(x, y) = (x + 1, y + 1)$, temos que se estende a unha proxectividade $\bar{f}([(x, y, z)]) = [(x + z, y + z, z)]$ (é o proceso que xeralmente se coñece como *homoxeneización*). De xeito similar, a partir de \bar{f} podemos pasar a unha afinidade tomando como recta do infinito $z = 0$, xa que é invariante pola afinidade. En cambio, non é posible facer ese proceso se consideramos como recta do infinito $y = 0$ xa que $\bar{f}([(x, 0, z)]) = [(x + z, z, z)]$; é dicir, non é invariante por \bar{f} .

2.3. Matrices de afinidades e proxectividades

Matrices

Sexa $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ unha afinidade. Se $q = p + \mathbf{u}$ tense que $f(q) = f(p) + \tilde{f}(\mathbf{u})$. Fixamos sistemas de referencia $\mathcal{R}_1 = \{u_1, \dots, u_n; p\}$ en \mathbb{A} e $\mathcal{R}_2 = \{v_1, \dots, v_m; p'\}$ en \mathbb{A}' . Se introducimos as coordenadas $q_{\mathcal{R}_1} = (x_1, \dots, x_n)$, $f(p)_{\mathcal{R}_2} = (b_1, \dots, b_m)$, obtemos

$$f(q)_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

onde $A = (a_{ij})$ é a matriz da aplicación lineal \tilde{f} nas base \mathcal{B}_u e \mathcal{B}_v . En termos das coordenadas ampliadas, escribimos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.3.1. Sexan $\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{A}' \xrightarrow{g} \mathbb{A}''$ afinidades e $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ referencias proxectivas. Entón,

$$M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3}(g) \cdot M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(f).$$

Ademais, se $\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{A}'$ é unha afinidade bixectiva e $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ referencias, entón

$$M_{\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1}(f^{-1}) = M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(f)^{-1}.$$

Demostración. Trátase dun cálculo análogo ao que se realiza para o comportamento das matrices con respecto á composición de aplicacións lineais para espazos vectoriais. \square

Proposición 2.3.2. Sexa \tilde{A} a matriz de $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ nas referencias $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}'_1$ de \mathbb{A} e \mathbb{A}' , respectivamente, e \tilde{B} nas referencias $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}'_2$. Sexa S a matriz de cambio de \mathcal{R}_2 a \mathcal{R}_1 , e R a matriz de cambio de \mathcal{R}'_2 a \mathcal{R}'_1 . Entón, $\tilde{B} = \tilde{R}^{-1} \tilde{A} \tilde{S}$.

O caso máis importante será aquel no que $\tilde{R} = \tilde{S}$, de xeito que se considera a mesma referencia á entrada que á saída, do mesmo xeito que sucedía para espazos vectoriais.

Exemplo. Sexa $f(x, y) = (3x - 2y, x + y - 1)$. Se pomos $f(x, y) = (x', y')$ temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sexa $\mathcal{R}' = \{(1, 1), (1, -1); (1, 1)\}$ outra referencia. Observamos que $f(1, 1) = (1, 1)$. Para calcular a imaxe dun vector, podemos proceder de dúas maneiras. Unha é calcular a imaxe dos puntos $q_i = p + v_i$, e usar que $\tilde{f}(v_i) = f(q_i) - f(p)$. A outra é considerar directamente \tilde{f} , a parte lineal de f , sen ter en conta a parte afín. Procedendo dese xeito, temos que

$$\tilde{f}(1, 1) = (1, 2) = 3/2(1, 1) + (-1/2)(1, -1),$$

mentres que

$$\tilde{f}(1, -1) = (5, 0) = 5/2(1, 1) + 5/2(1, -1).$$

Polo tanto, nesta referencia a matriz ampliada é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & 5/2 & 0 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Alternativamente, podemos interpretar este resultado en termos das matrices de cambio de base:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & 5/2 & 0 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Pasamos agora ao caso das proxectividades. Sexa $\varphi: E \rightarrow E'$ un isomorfismo de espazos vectoriais e $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$, $f = [\varphi]$. Sexa $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ unha referencia de \mathbb{P} e $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ unha base adaptado a \mathcal{R} . Do mesmo xeito, sexa $\mathcal{R}' = \{q_1, \dots, q_{n+1}; V\}$ unha referencia de \mathbb{P}' e $\mathcal{B}_v = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ unha base adaptada. Sexa $M_{u,v}(\varphi)$ a matriz da aplicación φ nesas bases.

Definición 2.3.1. A matriz de f nas referencias \mathcal{R} e \mathcal{R}' é $[M_{u,v}(\varphi)]$, visto como elemento no proxectivizado de $\mathcal{M}_{n+1}(K)$.

É unha comprobación rutineira ver que a matriz non depende das bases adaptadas nin tampouco do representante de φ .

Proposición 2.3.3. Sexan $\mathbb{P} \xrightarrow{f} \mathbb{P}' \xrightarrow{g} \mathbb{P}''$ proxectividades e $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ referencias proxectivas. Entón,

$$M_{\mathcal{R}, \mathcal{R}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}', \mathcal{R}''}(g) \cdot M_{\mathcal{R}, \mathcal{R}'}(f).$$

Ademais, se $\mathbb{P} \xrightarrow{f} \mathbb{P}'$ é unha proxectividade e $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ referencias, entón

$$M_{\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1}(f^{-1}) = M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(f)^{-1}.$$

Proposición 2.3.4. Sexa \tilde{A} a matriz de $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ nas referencias $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}'_1$ de \mathbb{P} e \mathbb{P}' , respectivamente, e \tilde{B} nas referencias $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}'_2$. Entón, $\tilde{B} = \tilde{R}^{-1} \tilde{A} \tilde{S}$.

Exemplo. Sexa $f(x, y, z) = (3x - 2y, x + y - z, z)$. Se pomos $f(x, y, z) = (x', y', z')$ temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sexa $\mathcal{R}' = \{[(1, 1, 0)], [(1, -1, 1)], [(1, 1, 1)]; [(3, 1, 2)]\}$ outra referencia. Observamos que $f([(1, 1, 1)]) = [(1, 1, 1)]$. Temos que

$$f([(1, 1, 0)]) = [(1, 2, 0)] = [3/2(1, 1, 0) + (-1/2)(1, -1, 0)],$$

mentres que

$$f([(1, -1, 0)]) = [(5, 0, 0)] = [5/2(1, 1, 0) + 5/2(1, -1, 0)].$$

Polo tanto, nesta referencia a matriz é

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 & 0 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, podemos interpretar este resultado en termos das matrices de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 & 0 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O grupo afín

O obxectivo desta sección é definir o chamado *grupo afín*, que é o conxunto de aplicacións afíns bixectivas dun espazo afín. A matriz dunha aplicación afín representámola como

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right);$$

isto suxire que podemos pensar unha aplicación afín como o produto de dúas compoñentes: unha parte correspondente á aplicación lineal asociada; e unha parte correspondente ao desprazamento da orixe de coordenadas. Isto suxire ver as aplicacións afíns como o produto de dúas compoñentes:

$$T_n(K) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} K^n;$$

e

$$L_n(K) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(K).$$

De xeito trivial tense que $T_n(K) \cap L_n(K) = \{1\}$, onde 1 refírese ao elemento neutro; e todo elemento $g \in G$ descompón como $g = tl$, onde $t \in T_n(K)$ e $h \in L_n(K)$.

Definición 2.3.2. Sexan G_1 e G_2 dous grupos, de xeito que existe unha acción $\varphi: G_2 \rightarrow \mathrm{Aut}(G_1)$. O *produto semidirecto* $G_1 \rtimes_{\varphi} G_2$ defínese como o conxunto $G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ coa operación dada por

$$(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1 \varphi_{g_2}(g'_1), g_2 g'_2).$$

Exemplo. Sexa $G_1 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Neste caso, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ consta de dous elementos: a identidade e a aplicación que intercambia as clases do 1 e do 2. Se denotamos por φ este último elemento, ao facer $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ obtemos un grupo non conmutativo que é isomorfo ao grupo simétrico S_3 .

Exemplo. Se $G = K^n$ coa operación dada pola suma, entón $\mathrm{Aut}(K) = \mathrm{GL}_n(K)$. Se $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, temos que $\mathrm{Aut}(G) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$, onde $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ son os elementos relativamente primos con n e a operación aí está definida polo produto.

Se K é un corpo e $n \geq 1$ é un enteiro, collemos $G_1 = K^n$ e $G_2 = \mathrm{GL}_n(K)$. Entón, o grupo afín é $K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)$, coa acción

$$\varphi: \mathrm{GL}_n(K) \rightarrow \mathrm{Aut}(K^n) \simeq \mathrm{GL}_n(K) \quad a \mapsto (b \mapsto ab).$$

É dicir, temos que

$$(b, A) \cdot (d, C) = (Ad + b, AC).$$

Definición 2.3.3. O grupo afín $\mathrm{Aff}_n(K)$ defínese como o produto semidirecto de K^n e $\mathrm{GL}_n(K)$ coa acción φ definida anteriormente: $\mathrm{Aff}_n(K) \simeq K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)$.

No caso no que $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, a cardinalidade do grupo afín $\mathrm{GL}_n(K)$ é

$$p^n \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i);$$

é dicir, a primeira columna pode ser un vector non nulo calquera, a segunda calquera dos $p^n - p$ linealmente independentes co primeiro, e así ata chegar á última, que non pode ser ningunha das p^{n-1} combinacións lineais dos $n - 1$ primeiros.

O grupo lineal proxectivo

De xeito análogo, imos definir o *grupo lineal proxectivo* como o conxunto de proxectividades (bixectivas) dun espazo afín.

Definición 2.3.4. O grupo lineal proxectivo $\mathrm{PGL}_{n+1}(K)$ é o cociente do grupo lineal das matrices invertibles de tamaño $n+1$ polo seu centro; alternativamente, é o conxunto de clases $[M]$, onde $[M] = \{\lambda M \mid \lambda \in K\}$, coa multiplicación dada por $[M] \cdot [N] = [MN]$.

Temos que a aplicación dada por

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}_n(K), b \in K^n,$$

define unha inxección do grupo afín no proxectivo; pero a xeometría da recta proxectiva é moito máis rica.

Por exemplo, no caso no que $n = 2$, o cardinal de $\mathrm{PGL}_2(K)$ é $p(p-1)(p+1)$, polo que o índice do grupo afín $\mathrm{Aff}(1)$ no proxectivo é $p+1$; iso correspóndese co feito de que o infinito pode ir a $p+1$ valores diferentes e as afinidades son precisamente as proxectividades que o deixan invariante.

Imos explorar con máis detalle precisamente o caso $n = 1$, pero no caso no que $K = \mathbb{C}$, no que o grupo lineal proxectivo pode identificarse coas chamadas transformacións de Möbius.

Definición 2.3.5. Definimos o plano complexo estendido como $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. No plano complexo estendido $\hat{\mathbb{C}}$, unha transformación de Möbius é unha función da forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cumpren que $ad - bc \neq 0$. Neste caso, se $c \neq 0$, $f(-d/c) = \infty$ e $f(\infty) = a/c$; e se $c = 0$, entón $f(\infty) = \infty$.

Temos de xeito natural unha bixección entre $\hat{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ que envía un elemento $z \neq \infty$ a $[z : 1]$ e ∞ a $[1 : 0]$. A súa inversa vén dada por $[z_1 : z_2] \mapsto z_1/z_2$, onde se entende que $a/0 = \infty$ se $a \neq 0$.

Algunhas propiedades inmediatas de comprobar das transformacións de Möbius son as seguintes. Por abreviar, pomos

$$f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{se} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(a) $f_A(z) = z$ para todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$ se, e soamente se, $A = \lambda \mathbb{I}_2$, con $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

$$(b) f_A \circ f_B = f_{AB}.$$

$$(c) f_A^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

(d) $f_A = f_B$ se, e soamente se, $B = \lambda A$, con $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ (isto é, se coinciden como elementos de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$).

Hai catro pezas básicas no grupo das transformacións de Möbius: as translacións, as rotacións, as homotecias e as inversións. Mentres que as tres primeiras son tamén transformacións afíns (fixan o infinito), as últimas non o son. As transformacións de Möbius forman un grupo e o inverso de f está dado por

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Proposición 2.3.5. Toda transformación de Möbius pode obterse como composición de translacións $z \mapsto z + b$, homotecias $z \mapsto az$ con $a \neq 0$ e a inversión $z \mapsto z^{-1}$.

Demostración. Dados complexos a, b, c, d con $ad - bc \neq 0$, se $c = 0$ entón $a, d \neq 0$ e tempos que a transformación pode obterse mediante as transformacións

$$z \mapsto \frac{a}{d}z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{az + b}{d}.$$

Alternativamente, se $c \neq 0$, podemos facer

$$z \mapsto cz \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \left(b - \frac{a}{c}d\right) \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{b - \frac{a}{c}d}{cz + d} + \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

□

Proposición 2.3.6. O grupo das transformacións de Möbius actúa no plano complexo estendido de xeito 3-transitivo, é dicir, fixadas as imaxes de tres puntos existe unha única transformación de Möbius que cumpra os requerimentos.

Demostración. Comezamos considerando a situación na que pomos $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ e $f(z_3) = \infty$. Iso quere dicir que $az_1 + b = 0$ e $cz_3 + d = 0$, polo que impondo a segunda condición temos que

$$a(z_2 - z_1) = c(z_2 - z_3).$$

Podemos pór $a = 1$, e nese caso temos

$$(a, b, c, d) = \left(1, -z_1, \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}, \frac{z_1 z_3 - z_2 z_3}{z_2 - z_3}\right).$$

Podemos escribir entón

$$f_{z_1, z_2, z_3} = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)z + z_3(z_1 - z_2)}.$$

Se queremos que $f(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$ entón simplemente consideramos a transformación definida por $f_{w_1, w_2, w_3}^{-1} f_{z_1, z_2, z_3}$, xa que f_{z_1, z_2, z_3} envía (z_1, z_2, z_3) a $(0, 1, \infty)$ e a inversa de f_{w_1, w_2, w_3} envía $(0, 1, \infty)$ a (w_1, w_2, w_3) . □

As transformacións de Möbius, como automorfismos da recta proxectiva, preservan a razón dobre. Porén, hai que ser coidadosos: a única variedade lineal de dimensión 1 en \mathbb{C} é o propio plano complexo, polo que non ten sentido, a priori, dicir que as transformacións de Möbius envíen rectas no sentido real (vendo \mathbb{C} como \mathbb{R}^2) a rectas. Si se cumpre que toda transformación de Möbius transforma rectas ou circunferencias en rectas ou circunferencias, e dado un par de rectas ou circunferencias existen infinitas transformacións de Möbius que transforman unha na outra. Volveremos a este resultado ao estudarmos as cónicas. Ademais, a razón dobre permite dar unha caracterización sinxela do feito de que catro puntos definan unha circunferencia.

Outra das ideas importantes é que o plano complexo estendido, e polo tanto $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, está en bixección coa esfera \mathbb{S}^2 , vista como o subconxunto de \mathbb{R}^3 dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Proposición 2.3.7. Existe unha bixección entre $\hat{\mathbb{C}}$ e \mathbb{S}^2 dada polas funcións

$$\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \quad (x, y) \mapsto \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right)$$

e

$$\psi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

e enviando o polo norte ao infinito e viceversa. En particular, hai unha bixección entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e \mathbb{S}^2 .

Demostración. Trátase dunha comprobación rutineira ver que a composición en ambos sentidos é a identidade. \square

Convén observar que un resultado similar é certo no caso real, no que existe unha bixección entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e \mathbb{S}^1 , a circunferencia unidade vista como o subconxunto de \mathbb{R}^2 que cumpre $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

2.4. Puntos fixos e variedades invariantes

Ao igual que sucede no caso das aplicacións lineais, o estudo das variedades invariantes desempeña un papel importante para entender a estrutura das aplicacións. Neste caso, unha primeira noción natural é a de *punto fixo*. Unha das vantaxes dos puntos fixos é que, cando se toman como orixe do sistema de referencia, permiten reducir a expresión matricial da afinidade á dunha aplicación lineal.

Definición 2.4.1. Sexa $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ unha afinidade. Dicimos que $q \in \mathbb{A}$ é un *punto fixo* de f se $f(q) = q$.

Proposición 2.4.1. Sexa $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ unha afinidade da forma $f(x) = Ax + b$ (isto é, onde A é a parte lineal e b o vector correspondente á imaxe da orixe).

- (a) f ten puntos fixos se, e soamente se, $\text{rango}(A - \mathbb{I}) = \text{rango}(A - \mathbb{I} \mid b)$.
- (b) Se o conxunto de puntos fixos non é baleiro, é unha variedade lineal afín de subespazo director $F = \ker(A - \mathbb{I})$; é dicir, o subespazo de vectores propios de valor propio 1 de \tilde{f} .
- (c) f ten un único punto fixo se, e soamente se, A non ten valor propio 1.

Demostración. (a) Tense que x é un punto fixo se, e soamente se, $Ax + b = x$, é dicir, $(A - \mathbb{I})x = -b$. O sistema é compatible se, e soamente se, o rango da matriz de coeficientes coincide co da matriz ampliada.

(b) O conxunto de puntos fixos é o conxunto de solucións do anterior sistema lineal non homoxéneo, é dicir, ten a forma $x_0 + F$, onde x_0 é un punto fixo e $F = \ker(A - \mathbb{I})$.

(c) O sistema ten unha única solución se, e soamente se, é compatible determinado. Iso quere dicir que a matriz de coeficientes ten rango máximo, é dicir, $A - \mathbb{I}$ é invertible; isto é equivalente a dicir que 1 non é valor propio. \square

Exemplo. Volvemos ao exemplo anterior. A afinidade dada por

$$f(x, y) = (3x - 2y, x + y - 1)$$

ten como único punto fixo o $(1, 1)$, xa que a matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que ten por polinomio característico $X^2 - 4X + 5$; claramente, o 1 non é raíz. Supoñamos agora que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Os valores propios son 1 e 3, polo que non pode ter un único punto fixo. Por exemplo, se $g(x, y) = (-3y + 4, x + 4y - 3)$, un punto fixo é o $(1, 1)$ e a variedade de puntos fixos é a dada por $(1, 1) + \langle (3, -1) \rangle$. En cambio, se $g(x, y) = (-3y + 5, x + 4y - 3)$, a afinidade non ten puntos fixos.

Definición 2.4.2. Sexa $V \subset \mathbb{A}$ unha variedade lineal afín. Dicimos que V é unha *variedade invariante* por f (ou f -invariante) se $f(V) \subset V$.

Imos discutir agora dous casos importantes, o das rectas invariantes e os hiperplanos invariantes. Como a imaxe dunha variedade lineal é unha variedade lineal, que unha recta sexa invariante quere dicir que hai dous puntos invariantes. Máis en xeral, a seguinte proposición dá un criterio sinxelo para determinar cando unha recta é invariante.

Proposición 2.4.2. Se $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ é unha afinidade e $r: q + \langle v \rangle$ é unha recta, tense que r é invariante por f se, e soamente se, v é un vector propio de \tilde{f} e ademais $\mathbf{qf}(\mathbf{q})$ e v son linealmente dependentes. É dicir, r é invariante se, e soamente se,

$$\text{rango}(\mathbf{qf}(\mathbf{q}), v) = \text{rango}((A - \mathbb{I})x + b, v) = 1.$$

Demostración. Se r é invariante, $f(r)$ ten o mesmo vector director, polo que v ten que ser un vector propio de \tilde{f} . Ademais, como $q, f(q) \in r$, o vector $\mathbf{qf}(\mathbf{q})$ ten a mesma dirección que v .

Reciprocamente, se $\tilde{f}(v) = \lambda v$ e $\mathbf{qf}(\mathbf{q}) = \mu v$, temos que

$$f(q + t \cdot v) = f(q) + t \cdot \tilde{f}(v) = q + \mu v + t\lambda v = q + (\mu + t\lambda)v.$$

\square

No caso dos hiperplanos, imos restrinxirnos á situación na que f é bixectiva. Nun sistema de referencia, podemos escribir a ecuación do plano como $\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_{n+1} = 0$. Sexa \tilde{A} a matriz ampliada de f e $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$, $x = (x_1, \dots, x_n, 1)$ vectores columnas.

Proposición 2.4.3. Sexa f unha aplicación afín bixectiva. Coas notacións anteriores, H é invariante por f se, e soamente se, $\text{rango}(a^t, a^t \tilde{A}) = \text{rango}(a, \tilde{A}^t a) = 1$. É dicir, se, e soamente se, a é un vector propio da matriz transposta \tilde{A}^t .

Demostración. A condición de que x sexa un punto do plano escríbese como $a^t x = 0$. Se o plano é invariante por f , temos que Ax pertence ao plano se, e soamente se, x tamén pertence. A condición de que Ax pertenza escríbese como $a^t Ax = 0$. Polo tanto, temos que a^t e $a^t A$ pódense interpretar como dúas aplicacións lineais de xeito que os seus núcleos coinciden; iso quere dicir que o subespazo que xerán é de dimensión 1. \square

Este concepto resultará máis intuitivo ao estudarmos a dualidade proxectiva. Nese contexto, teremos un novo espazo no que os puntos corresponderanse cos hiperplanos, e a matriz da aplicación correspondente será a transposta.

Exemplo. Consideramos a afinidade dada por $f(x, y) = (-y + 3, x + 2y - 3)$. Para que unha recta sexa invariante, o vector director ten que ser un vector propio. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ten como subespazo de vectores propios o xerado por $(1, -1)$. Polo tanto, consideremos unha recta arbitraria con ese vector director, da forma $(x_0, y_0) + \langle (1, -1) \rangle$. É suficiente con impor que (x_0, y_0) pertenza á recta. Tense que $f(x_0, y_0) = (-y_0 + 3, x_0 + 2y_0 - 3)$, polo que debe existir t de xeito que

$$(-y_0 + 3, x_0 + 2y_0 - 3) = (x_0, y_0) + (t, -t).$$

Pondo $t = -x_0 - y_0 + 3$ temos que sempre se cumpre, polo que tódalas rectas que teñan ese vector director son invariantes.

Exemplo. Consideramos de novo o exemplo $f(x, y) = (-y + 3, x + 2y - 3)$. Podemos empregar o método anterior para atopar as rectas invariantes, xa que en dimensión dous son tamén hiperplanos. Neste caso,

$$\tilde{A}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

O único valor propio real é o 1, con multiplicidade alxébrica 3. A multiplicidade xeométrica é 2, co subespazo de vectores propios xerado por $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Polo tanto, calquera recta da forma

$$ax - ay + c = 0$$

é invariante por f .

Pasamos agora a analizar o caso proxectivo. Nesta situación, podemos reducirnos ao caso de espazos vectorais, xa que hai unha correspondencia bixectiva entre variedades lineais proxectivas e subespazos vectorais.

Sexa (\mathbb{P}, E, π) un espazo proxectivo de dimensión n . Sexa f unha homografía de \mathbb{P} , con $f = [\varphi]$. Sexan $p \in \mathbb{P}$ e L unha variedade de \mathbb{P} . Se $p = [x]$ e $L = [F]$, p é un punto fixo se, e soamente se, x é un vector propio de f ; L é f -invariante se, e soamente se $\varphi(F) = F$; e L é de puntos fixos por f se, e soamente se, existe $\lambda \in K$ non nulo de xeito que $\varphi(x) = \lambda x$ para todo $x \in F$.

Proposición 2.4.4. Sexa $f = [\varphi]$ unha proxectividade. Hai unha bixección entre variedades lineais proxectivas invariantes por f e subespazos vectoriais invariantes por φ .

Demostración. Xa establecemos que hai unha bixección entre subespazos vectoriais de E e variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} . Esta bixección preserva os subespazos invariantes, é dicir, se $L = [F]$, entón $f(L) = [\varphi(F)]$, polo que $f(L) \subset L$ se, e soamente se, $\varphi(F) \subset F$. \square

Imos agora estudar a interacción entre variedades afíns invariantes e variedades proxectivas invariantes. Sexa $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ unha afinidade e sexa \mathbb{P} a completación proxectiva de \mathbb{A} . Consideramos a proxectividade inducida por f , que denotamos $\bar{f}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$. Xa establecemos que hai unha bixección entre as afinidades de \mathbb{A} e as proxectividades de \mathbb{P} que deixan fixo o hiperplano do infinito.

Esta relación entre afinidades e proxectividades pode ser empregada para estudar as variedades invariantes das afinidades a partir das proxectividades, onde dispomos dun procedemento máis sistemático baseado na teoría de subespazos invariantes. En particular, se consideramos a proxectividade asociada á aplicación afín, temos que as variedades invariantes pola afinidade son as invariantes pola proxectividade que fixan o hiperplano do infinito.

Exemplo. Imos considerar a proxectividade $f([x : y : z]) = (-y + 3z, x + 2y - 3z, z)$, obtida a partir da afinidade traballada anteriormente. A matriz correspondente é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuxa forma de Jordan é

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sexa $\{v_1, v_2, v_3\}$ unha base de Jordan, con $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ e $v_3 = (-3, 0, 1)$. Entón, os subespazos invariantes de dimensión 1 son todos os da forma $\langle \alpha v_1 + \beta v_3 \rangle = \langle (-\alpha - 3\beta, \alpha, \beta) \rangle$, o que se corresponde co feito de que a recta $x + y = 3$ é unha recta de puntos fixos. Para os subespazos de dimensión 2, temos que son os da forma $\langle v_1, v \rangle$, onde v é un vector calquera linealmente independente con v_1 . Isto dinos que calquera recta afín que teña por vector director $(-1, 1)$ é invariante.

2.5. Algunhas familias de afinidades

O obxectivo das seguintes seccións é introducirse na clasificación de afinidades e proxectividades. Nesta sección, imos definir catro familias de afinidades que se poden considerar en dimensión arbitraria: as translacións, as homotecias, as proxeccións e as simetrías. Para cada unha delas, imos discutir as súas propiedades máis importantes e as súas variedades invariantes. En seccións posteriores, restrinxirémonos aos casos de dimensións baixas para realizar un estudo máis exhaustivo.

Translaci3ns

Definici3n 2.5.1. Sexa $v \in E$ un vector. A translaci3n de \mathbb{A} de vector de translaci3n v 3 a afinidade definida por

$$\tau_v: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}, \quad q \mapsto q + v.$$

Proposici3n 2.5.1. As translaci3ns cumpren as seguintes propiedades:

- (a) $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ 3 unha translaci3n se, e soamente se, $\tilde{f} = \text{Id}$.
- (b) As translaci3ns non teñen puntos fixos, salvo no caso no que $v = 0$, no que a aplicaci3n af3n 3 a identidade.
- (c) As rectas de vector director v son invariantes por τ_v . En xeral, unha variedade lineal $V = q + F$ 3 invariante por τ_v se, e soamente se, $v \in F$.
- (d) A composici3n de translaci3ns 3 unha translaci3n e c3mpre que

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}.$$

Demostraci3n. (a) Fixamos un punto orixe p . Se f 3 unha translaci3n, ent3n

$$\tilde{f}(u) = f(p + u) - f(p) = p + u + v - (p + v) = u,$$

polo que a aplicaci3n lineal asociada 3 a identidade. O rec3proco 3 tam3n certo, xa que se $\tilde{f} = \text{Id}$ e $q = p + u$, ent3n

$$f(q) = f(p) + \tilde{f}(u) = f(p) + u = (f(p) - p) + q;$$

isto quere dicir que f 3 unha translaci3n de vector $\mathbf{pf}(p)$.

- (b) Un punto q 3 fixo se, e soamente se, $q + v = q$, 3 dicir, s3 poden existir puntos fixos cando $v = 0$. Nese caso, a translaci3n 3 a identidade.
- (c) Sexa $r: p + \langle w \rangle$ unha recta. Ent3n, $\tau_v(r): \tau(p) + \langle w \rangle$, xa que a aplicaci3n lineal asociada 3 a identidade. Polo tanto, 3 invariante se, e soamente se, $\mathbf{pf}(p) = w$ ten a direcci3n de v .

M3is en xeral, se $V = q + F$ 3 unha variedade lineal, temos que $\tau_v(V) = (q + v) + F$, polo tanto tense que $\tau_v(V) \subset V$ se, e soamente se, $(q + v) - q = v \in F$.

- (d) 3 inmediato que $(\tau_u \circ \tau_v)(q) = \tau_u(q + v) = q + (u + v)$.

□

En particular, as translaci3ns forman un subgrupo do grupo af3n. Tr3tase dun grupo abeliano que podemos entender como o conxunto das matrices

$$T_n(K) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \mid b \in K^n \right\},$$

con $\text{Aff}_n(K)/T_n(K) \simeq \text{GL}_n(K)$.

Homotecias

Definición 2.5.2. Sexa $p \in \mathbb{A}$ e $\alpha \in K$, con $\alpha \neq 1$. A homotecia de centro p e razón α é a afinidade definida por

$$h_{p,\alpha}: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}, \quad q \mapsto p + \alpha(q - p).$$

O caso $\alpha = 1$ exclúese da definición; nese caso, $h_{p,\alpha}$ corresponderíase coa identidade.

Proposición 2.5.2. As homotecias cumpren as seguintes propiedades:

- (a) f é unha homotecia se, e soamente se, $\tilde{f} = \alpha \cdot \text{Id}$, con $\alpha \neq 1$.
- (b) Toda homotecia ten un único punto fixo, o seu centro. Nun sistema de referencia \mathcal{R} , as coordenadas do centro dunha homotecia cumpren que $x = -\frac{1}{\alpha-1}b$, donde $b = f(p)$ e p é a orixe de \mathcal{R} .
- (c) Unha variedade lineal V é invariante por unha homotecia se, e soamente se, contén o centro da homotecia.
- (d) A composición de homotecias $h_{a,\alpha}$ e $h_{b,\beta}$ é unha homotecia de razón $\alpha\beta$ se $\alpha\beta \neq 1$. En caso contrario é unha translación.

Demostración. (a) Fixamos o punto p como a orixe do sistema de referencia. Se f é unha homotecia, entón

$$\tilde{f}(u) = f(p + u) - f(p) = p + \alpha u - p = \alpha u,$$

polo que a aplicación lineal asociada é $\tilde{f} = \alpha \cdot \text{Id}$. O recíproco é tamén certo: se $\tilde{f} = \alpha \cdot \text{Id}$ entón f ten un único punto fixo p , xa que o 1 non é valor propio de \tilde{f} . Pondo $q = p + u$, temos

$$f(q) = f(p) + \tilde{f}(u) = f(p) + \alpha u = p + \alpha(q - p),$$

polo que f é unha homotecia de centro p e razón α .

- (b) A condición de que q sexa un punto fixo é que $q = p + \alpha(q - p)$, que é equivalente a $(\alpha - 1)\mathbf{p}q = 0$. Como $\alpha \neq 1$, iso pasa se, e soamente se, $p = q$. Para atopar as coordenadas do punto, pomos $Ax + b = x$, de onde se ten que $(A - \mathbb{I})x = -b$. Dado que A é a matriz $\alpha\mathbb{I}$, de aquí deducimos que $x_i = \frac{-b_i}{\alpha-1}$ para todo i .
- (c) Se contén o centro, a variedade é invariante porque calquera recta que pasa polo centro o é (a aplicación lineal corresponde á multiplicación por α). En xeral, se $V = q + F$, temos que $h_{a,\alpha}(V) = h_{a,\alpha}(q) + F$, onde empregamos que a aplicación lineal inducida é un múltiplo da identidade. Polo tanto, a condición necesaria e suficiente é que $(p + \alpha(q - p)) - q \in F$, é dicir, que $q - p \in F$. Isto é equivalente a $p \in q + F = V$, é dicir, que conteña o centro da homotecia.
- (d) Temos que

$$\begin{aligned} (h_{a,\alpha} \circ h_{b,\beta})(q) &= h_{a,\alpha}(b + \beta(q - b)) \\ &= a + \alpha(b + \beta(q - b) - a) \\ &= a + \alpha(b - a) + \alpha\beta(q - b). \end{aligned}$$

Se $\alpha\beta \neq 1$, entón é unha homotecia de centro de razón $\alpha\beta$; se $\alpha\beta = 1$, entón é unha translación de vector $(1 - \alpha) \cdot (a - b)$. No caso $\alpha\beta \neq 1$, o centro é o único punto p que cumpre

$$p + \alpha\beta(q - p) = a + \alpha(b - a) + \alpha\beta(q - b)$$

para calquera elección de q . É unha comprobación inmediata ver que p está ben definido e é único. □

O conxunto formado polas translacións e as homotecias é un subgrupo do grupo afín (que contén, á súa vez, ao subgrupo das translacións). Son as matrices da forma

$$H_n(K) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha \mathbb{I}_n & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \mid \alpha \in K, \beta \in K^n \right\}.$$

En particular, obsérvase como a composición de dúas homotecias de razóns α e β , con $\alpha\beta = 1$, é unha translación:

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha & b_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha^{-1} & b_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \alpha b_2 + b_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

O cociente é precisamente $\text{Aff}_n(K)/H_n(K) \simeq \text{PGL}_n(K)$, o proxectivizado do grupo lineal.

Proxeccións

Definición 2.5.3. Unha afinidade $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ é unha *proxección* se $f^2 = f$.

A condición de $f^2 = f$ quere dicir que o polinomio mínimo da parte lineal é un divisor de $X^2 - X$. Polo tanto, supondo que o espazo ten dimensión polo menos 1, hai tres opcións.

- (i) Se $\text{Min}(\tilde{f}; X) = X$, entón $\tilde{f} = 0$ e f é a proxección a un punto.
- (ii) Se $\text{Min}(\tilde{f}; X) = X - 1$, tense entón que $\tilde{f} = \text{Id}$ e f é unha translación que ten un único punto fixo, é dicir, $f = \text{Id}$.
- (iii) Se $\text{Min}(\tilde{f}; X) = X(X - 1)$. Hai logo unha descomposición da forma $E = F \oplus G$, onde F é o subespazo de vectores propios de valor propio 1 e G o de vectores propios de valor propio 0. Polo tanto, pódese escribir

$$f(p) = q + \tilde{f}(\mathbf{qp}) = q + \tilde{f}(u) + \tilde{f}(v) = q + u,$$

onde escribimos $\mathbf{qp} = u + v \in F \oplus G$. Neste caso dicimos que f é a proxección sobre $V = q + F$ na dirección G . Observamos tamén que V é a variedade de puntos fixos.

Proposición 2.5.3. Toda proxección ten puntos fixos. Cúmrese que q é punto fixo de f se, e soamente se, q está na imaxe de f . En particular, se q é un punto fixo, a variedade lineal de puntos fixos é a variedade lineal $V = q + \tilde{f}(E)$.

Demostración. Supoñamos que q é un punto fixo. Entón, $q = f(q) \in \text{im}(f)$; reciprocamente, se un punto q pertence á imaxe de f , é dicir, $q = f(p)$, aplicando f a cada lado tense que $f(q) = f^2(p) = f(p)$, polo que $q = f(q)$. □

No relativo ás variedades lineais invariantes, temos que dous exemplos son a variedade de puntos fixos (ou unha subvariedade súa) ou calquera variedade que sexa paralela á dirección da proxección. Porén, estas poden non ser as únicas. Máis concretamente, sexa $V = q + F$ unha variedade lineal invariante. Entón, $f(V) = f(q) + \tilde{f}(F)$. En particular, V é invariante se, e soamente se, $f(q) \in V$ e $\tilde{f}(F) \subset F$. Polo tanto, calquera variedade invariante ten que ter puntos fixos: se $q = f(q)$, está claro; senón, como $f(q) \in V$, temos tamén que $f(q) = f^2(q)$. Sexa entón q un punto fixo. Como a restrición de \tilde{f} a F diagonaliza, podemos considerar unha base de vectores propios e pór unha referencia proxección da forma $\{v_1, \dots, v_s; q\}$. Suporemos que v_1, \dots, v_r teñen valor propio 0 e v_{r+1}, \dots, v_s teñen valor propio 1; entón, $r \neq s$. Polo tanto $f(V) = q + \langle v_{r+1}, \dots, v_s \rangle$. É dicir, unha variedade é invariante se, e soamente se, contén un punto fixo e o subespazo director é un subespazo invariante.

Exemplo. Sexa f a proxección con respecto ao plano $x+3y=0$ na dirección $(1, -1, 2)$. Consideremos unha referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$ na cal $\{v_1, v_2\}$ é unha base do subespazo director do plano e v_3 se corresponde coa dirección de proxección. Podemos coller $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (-3, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$. Se fixamos como \mathcal{O} un punto calquera do plano (que é invariante), por exemplo $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$, temos que a matriz de f na referencia \mathcal{R} é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

É dicir, os vectores directores do plano son vectores propios de valor propio 1 e os vectores correspondentes á dirección de proxección teñen valor propio 0.

Exemplo. Consideremos a proxección de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ dada por $f(x, y, z, t) = (x, y, 0, 0)$. Nese caso, a variedade de puntos fixos é o plano dado por $z = 0$ e $t = 0$.

Para que un subespazo $V = q + F$ sexa invariante por f , se $q = (a, b, c, d)$, téñense que cumprir dúas condicións: que F sexa un subespazo vectorial invariante por \tilde{f} e que $(0, 0, c, d)$ pertenza ao subespazo. Temos entón dúas opcións:

- (i) Se $c = d = 0$, F pode ser calquera subespazo invariante. É dicir, se a variedade contén un punto fixo, entón o subespazo director pode ser calquera subespazo invariante.
- (ii) Se $(c, d) \neq (0, 0)$, entón o vector $(0, 0, c, d)$ ten que pertencer ao subespazo F . Por exemplo, podemos coller a recta $(1, 1, 1, 0) + t \cdot (0, 0, 1, 0)$. En calquera caso, a variedade pódese escribir como $(1, 1, 0, 0) + t \cdot (0, 0, 1, 0)$, polo que de novo estamos na situación anterior (un punto fixo e un subespazo vectorial invariante).

Simetrías

Definición 2.5.4. Unha afinidade $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ é unha *simetría* se $f^2 = \text{Id}$.

A condición de $f^2 = \text{Id}$ quere dicir que o polinomio mínimo da parte lineal é un divisor de $X^2 - 1$. Polo tanto, supondo que o espazo ten dimensión polo menos 1, hai tres opcións.

- (i) Se $\text{Min}(\tilde{f}; X) = X - 1$, entón $\tilde{f} = \text{Id}$ e f é unha translación; como $f^2 = \text{Id}$, entón, se a característica é diferente de 2, $f = \text{Id}$.

- (ii) Se $\text{Min}(\tilde{f}; X) = X + 1$, tense entón $\tilde{f} = -\text{Id}$ e como \tilde{f} non ten valor propio 1, sucede que f ten un único punto fixo q . Se o collemos como centro da referencia, temos que $f(p) = q + \tilde{f}(\mathbf{qp}) = q - \mathbf{qp}$, é dicir, f envía os puntos de \mathbb{A} aos seus simétricos respecto do único punto fixo q . Diremos que f é unha *simetría central de centro* q .
- (iii) Se $\text{Min}(\tilde{f}; X) = X^2 - 1$, hai unha descomposición da forma $E = F \oplus G$, onde F é o subespazo de vectores propios de valor propio 1 e G o de vectores propios de valor propio -1 . Polo tanto, pódese escribir

$$f(p) = q + \tilde{f}(\mathbf{qp}) = q + \tilde{f}(u) + \tilde{f}(v) = q + u - v,$$

onde escribiremos $\mathbf{qp} = u + v \in F \oplus G$. Neste caso dicimos que f é a *simetría respecto a* $V = q + F$ *na dirección* G . En particular, V é a variedade de puntos fixos de f .

Exemplo. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, consideramos a afinidade $f(x, y) = (-x + 1, -y)$. Podemos entender f como unha simetría central con respecto ao punto $(0, 0)$ seguida dunha translación de vector $(1, 0)$. Alternativamente, f é unha simetría central con respecto ao punto $(1/2, 0)$. Para ver isto último, simplemente observamos que

$$(1/2, 0) = \frac{1}{2}(a, b) + \frac{1}{2}f(a, b),$$

para calquera punto $(a, b) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Proposición 2.5.4. Se a característica de K é diferente de 2, toda simetría ten puntos fixos. Se f é unha simetría central, entón ten un único punto fixo, que é o punto medio do segmento que une p e $f(p)$, para calquera $p \in \mathbb{A}$.

Demostración. Para un punto p calquera tense que $\frac{p+f(p)}{2}$ é un punto fixo xa que

$$\frac{f(p) + f^2(p)}{2} = \frac{f(p) + p}{2}.$$

Como a parte lineal dunha simetría central non ten o valor propio 1, ten un único punto fixo q . Polo visto antes, cúmprese que $f(p) = 2q - p$ para todo p . \square

No relativo ás variedades lineais invariantes, temos que dous exemplos son a variedade de puntos fixos (ou unha subvariedade súa) ou calquera variedade que sexa paralela á dirección da simetría. Porén, pódense dar máis casos. Por exemplo, se $V = q + F$ e q é un punto fixo, entón F pode ser calquera subespazo vectorial invariante por \tilde{f} . Se non ten puntos fixos, a condición é que $\mathbf{qf}(\mathbf{q})$ estea contido en F e que F sexa un subespazo invariante.

Exemplo. Sexa f a simetría con respecto ao plano $x + 3y = 0$ na dirección $(1, -1, 2)$. Consideremos unha referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$ na cal $\{v_1, v_2\}$ é unha base do subespazo director do plano e v_3 se corresponde coa dirección de proxección. Podemos coller $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (-3, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$. Se fixamos como \mathcal{O} un punto calquera do plano (que é invariante), por exemplo $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$, temos que a matriz de f na referencia \mathcal{R} é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

É dicir, os vectores directores do plano son vectores propios de valor propio 1 e os vectores correspondentes á dirección de proxección teñen valor propio -1.

Exemplo. Consideremos a proxección de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ dada por $f(x, y, z, t) = (x, y, -z, -t)$. Nese caso, a variedade de puntos fixos é o plano dado por $z = 0$ e $t = 0$.

Para que un subespazo $V = q + F$ sexa invariante por f , se $q = (a, b, c, d)$, téñense que cumprir dúas condicións: que F sexa un subespazo vectorial invariante por \tilde{f} e que $(0, 0, c, d)$ pertenza ao subespazo. Temos entón dúas opcións:

- (i) Se $c = d = 0$, F pode ser calquera subespazo invariante. É dicir, se a variedade contén un punto fixo, entón o subespazo director pode ser calquera subespazo invariante.
- (ii) Se $(c, d) \neq (0, 0)$, entón o vector $(0, 0, c, d)$ ten que pertencer ao subespazo F . Por exemplo, podemos coller a recta $(1, 1, 1, 0) + t \cdot (0, 0, 1, 0)$. En calquera caso, a variedade pódese escribir como $(1, 1, 0, 0) + t \cdot (0, 0, 1, 0)$, polo que de novo estamos na situación anterior (un punto fixo e un subespazo vectorial invariante).

2.6. Clasificación de afinidades en dimensión 1 e 2

Definición 2.6.1. Sexan $f, g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ dúas afinidades. Diremos que f e g son *afinidades equivalentes*, e escribimos $f \sim g$, se existen sistemas de referencia cartesianos \mathcal{R} e \mathcal{R}' de xeito que $M_{\mathcal{R}}(f) = M_{\mathcal{R}'}(g)$.

Proposición 2.6.1. Se $f \sim g$ e V e W son as variedades de puntos fixos de f e g , respectivamente, entón $\dim V = \dim W$.

En particular, dúas translacións calquera son sempre equivalentes, e unha translación nunca é equivalente a unha homotecia.

Se \tilde{S} é a matriz de cambio de referencia de \mathcal{R} a \mathcal{R}' e pomos \tilde{A} e \tilde{B} para as matrices de f e g nas referencias \mathcal{R} e \mathcal{R}' , respectivamente, entón f e g son equivalentes se $\tilde{B} = \tilde{S}^{-1}\tilde{A}\tilde{S}$, é dicir

$$\left(\begin{array}{c|c} B & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} S & s \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} S & s \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} S^{-1}AS & S^{-1}((A-I)s+b) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

De cara á clasificación das afinidades, buscaremos unha referencia na que a matriz \tilde{A} admita unha expresión sinxela, que chamaremos a *forma reducida* de \tilde{A} .

Ímonos centrar nos casos de dimensión 1 e 2, aínda que moitas das ideas que introducimos son válidas nun contexto máis xeral.

Clasificación na recta afín

Proposición 2.6.2. Sexa \mathbb{A} un espazo afín de dimensión 1. Se $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ é unha afinidade, entón f é unha translación ou unha homotecia (incluíndo o caso $\alpha = 0$, que corresponde á proxección de \mathbb{A} nun punto).

Demostración. Se a afinidade ten dous puntos fixos, entón automaticamente é a identidade. Se ten un, collémolo como orixe da referencia e a aplicación lineal asociada é un múltiplo da identidade, polo que é unha homotecia. Se non ten puntos fixos, cúmprese que a parte lineal é a identidade (porque ten que ter o valor propio 1) e entón é unha translación. \square

É dicir, este resultado afirma que calquera afinidade da recta afín se pode escribir como $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in K$. Convén observar que o que estamos a estudar é lixeiramente máis xeral que o conxunto de elementos do grupo afín, xa que tamén estamos permitindo aplicacións non bixectivas. Ese caso dáse se, e soamente se, $a = 0$, en cuxo caso a aplicación é a proxección a un punto.

Exemplo. Sexa $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ dada por $f(x) = 3x + 2$. O único punto fixo de f obtense facendo $3x + 2 = x$, isto é, $x = -1$. Esta observación permite escribir $f(x) = 3(x + 1) - 1$; é dicir, collendo a referencia $\{v_1; \mathcal{O}\}$, onde $v_1 = 1$ e $\mathcal{O} = -1$, temos que a ecuación de f é $f(\bar{x}) = 3\bar{x}$. Isto quere dicir que f é unha homotecia de centro -1 e razón 3 .

Clasificación no plano afín

Para clasificar as afinidades en dimensión 2, basearémonos en dous aspectos fundamentais: (i) a descomposición ou non do polinomio característico; (ii) a dimensión da variedade V de puntos fixos de V . En particular, se f ten puntos fixos, podemos coller unha referencia que teña por orixe un destes puntos fixos.

Imos comezar co caso no que $\text{Char}(A; X)$ non descompón en factores lineais.

Proposición 2.6.3. Sexa f unha afinidade e A a matriz de \tilde{f} . Tense que $\text{Char}(A; X)$ non descompón en factores lineais se, e soamente se, se cumpren simultaneamente as seguintes dúas condicións.

- (a) f ten un único punto fixo.
- (b) Para todo $u \in E$ non cero, os vectores u e $\tilde{f}(u)$ son linealmente independentes.

Neste caso non hai rectas invariantes.

Demostración. Como A non ten o valor propio 1 xa que non ten raíces reais, tense que f ten exactamente un único punto fixo. Por outro lado, se $\tilde{f}(u)$ fose linealmente dependente con u , iso queredría dicir que $\tilde{f}(u) = \lambda u$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, polo que A tería valores propios reais. Por último, ao non haber vectores propios, non é posible que haxa rectas invariantes. \square

Imos considerar agora que $\text{Char}(A; X) = (X - \alpha)(X - \beta)$, con α e β no corpo K . A dimensión da variedade de puntos fixos V pode ser 2, 1, 0 ou ser o conxunto baleiro. Imos analizar cada caso por separado. En total, teremos nove situacións diferentes.

- (a) Se $\dim V = 2$, entón $f = \text{Id}$. É dicir, se tódolos puntos do plano son fixos, a aplicación ten que ser a identidade.
- (b) Se $\dim V = 1$, entón dise que f é unha *homoloxía*. Hai unha recta de puntos fixos e, en particular, 1 é un valor propio. Cómpre distinguir o caso no que f diagonaliza e no que non.
 - (i) Se A diagonaliza diremos que é unha *homoloxía xeral*. O outro valor propio non pode ser 1, xa que nese caso teríamos que $\tilde{f} = \text{Id}$, o que queredría dicir que f é unha translación. A forma reducida é entón

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nunha referencia da forma $\mathcal{R} = \{p; u_1, u_2\}$, onde p é un punto fixo, u_1 é un vector propio de valor propio 1 e u_2 un vector propio de valor propio α . Hai unha recta de puntos fixos, $V = p + t \cdot u_1$, mentres que tódalas rectas con dirección u_2 son invariantes. Dise que V é o *eixe da homoloxía* e que u_2 é a *dirección*. O valor propio α adoita chamarse *razón* ou *factor de escala*.

Se $\alpha = 0$, temos unha proxección sobre V na dirección u_2 . Se $\alpha = -1$ é unha simetría axial de eixe V na dirección u_2 .

- (ii) Se A non diagonaliza dicimos que é unha *homoloxía especial*. A forma reducida é

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nunha referencia $\mathcal{R} = \{p; u_1, u_2\}$, onde p é un punto fixo e $\{u_1, u_2\}$ é unha base de Jordan. Temos que $V = p + t \cdot u_1$ é unha recta de puntos fixos e tódalas rectas paralelas a V son invariantes. Dise que V é o *eixe* da homoloxía e u_1 a *dirección*; en particular, u_2 fai un papel auxiliar, como amosa o feito de que para construír a base de Jordan se pode escoller calquera vector linealmente independente co vector propio.

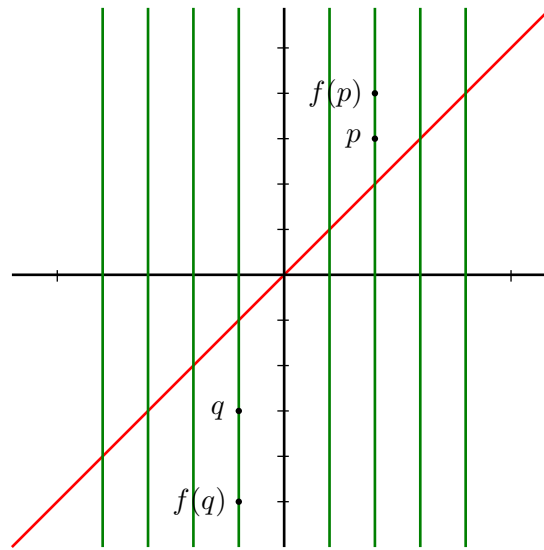
Exemplo. Consideremos a familia de afinidades dada por $f(x, y) = (x + y, by)$, onde $b \in K$. Para $b \neq 1$, a aplicación lineal asociada f ten dous valores propios distintos, 1 e b . O subespazo de vectores propios asociado a 1 é $\langle(1, 0)\rangle$ e o asociado a b é $\langle(1, b-1)\rangle$. Pondo $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (1, b-1)$. Nese caso, é unha homoloxía xeral, na que a recta $r: (0, 0) + t \cdot (1, 0)$ é de puntos fixos e tódalas rectas na dirección $(1, b-1)$ son invariantes. No caso límite $b = 1$, o que sucede é que os dous subespazos propios son o mesmo, pero o resultado segue a ser o mesmo: a recta de puntos fixos é a mesma e o que sucede é que a familia de rectas paralelas invariante agora é paralela á recta de puntos fixos.

Exemplo. Consideramos as afinidades f e g que teñen por matrices ampliadas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

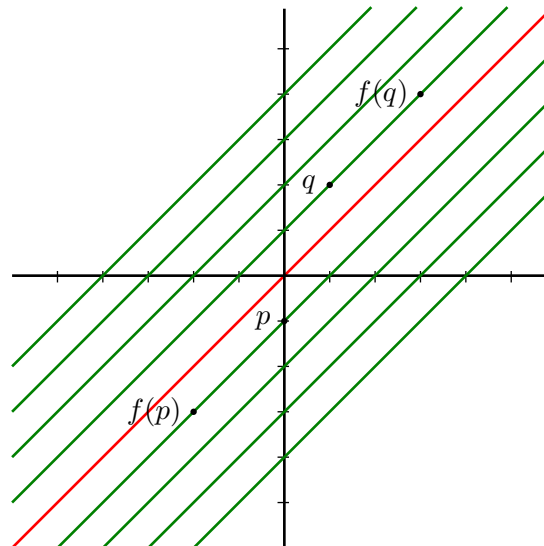
No primeiro caso, temos que $\text{Char}(\tilde{f}; X) = (X-1)(X-2)$, e como a orixe é un punto fixo, sabemos automaticamente que se trata dunha homoloxía xeral. O vector propio asociado ao valor propio 1 é o $(1, 1)$, polo que a recta $x - y = 0$ é o eixe da homoloxía. Por outro lado, $(0, 1)$ é a dirección da homoloxía e a razón é $\alpha = 2$. No seguinte debuxo, representamos en vermello o eixe, e en verde as rectas invariantes; a restrición de f a estas rectas é unha homotecia de razón 2; por exemplo, a imaxe de $p = (2, 3)$ é $f(p) = (2, 4)$; e a imaxe de $q = (-1, -3)$ é $f(q) = (-1, -5)$.

$$y = x$$



No segundo caso, $\text{Char}(\tilde{g}; X) = (X-1)^2$, e como \tilde{g} non é a identidade e g ten a orixe como punto fixo, trátase dunha homoloxía especial. Nese caso, o eixe é a recta $x - y = 0$, e calquera recta paralela a ela é invariante. No seguinte debuxo, representamos en vermello o eixe, e en verde as rectas invariantes; a restrición de f a estas rectas é unha translación; por exemplo, a imaxe de $p = (0, -1)$ é $f(p) = (-2, -3)$; e a imaxe de $q = (1, 2)$ é $f(q) = (3, 4)$.

$$y = x$$



- (c) Cando $\dim V = 0$, hai un único punto fixo p que collemos como orixe. Hai que distinguir tres casos segundo diagonalice con $\alpha = \beta$, con $\alpha \neq \beta$ ou que non diagonalice.

(i) Se A diagonaliza e $\alpha = \beta$, f é unha *homotecia de razón α e centro p* . A

forma reducida é entón

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nunha referencia da forma $\mathcal{R} = \{p; u_1, u_2\}$, onde p é o punto fixo, e u_1 e u_2 son dous vectores arbitrarios linealmente independentes. As rectas invariantes son todas as que pasan polo centro da homotecia.

- (ii) Se A diagonaliza e $\alpha \neq \beta$, f é unha composición de homoloxías xerais. A forma reducida é entón

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nunha referencia da forma $\mathcal{R} = \{p; u_1, u_2\}$, onde p é o punto fixo, e u_1 e u_2 son vectores propios de valor propio α e β , respectivamente. Hai dúas rectas invariantes, que son as de eixes $p + t \cdot u_1$ e $p + t \cdot u_2$. O feito de que sexa composición de homoloxías xerais represéntase mediante a igualdade

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

- (iii) Se A non diagonaliza, dise que é unha *homotecia especial*. A forma reducida é entón

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nunha referencia da forma $\mathcal{R} = \{p; u_1, u_2\}$, onde p é un punto fixo, e $\{u_1, u_2\}$ é unha base de Jordan, sendo u_1 un vector propio de valor propio α . Hai unha recta invariante, a $p + t \cdot u_1$.

- (d) Imos á situación na que non hai puntos fixos. Neste caso imos comezar coa seguinte observación.

Proposición 2.6.4. Sexa $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ unha afinidade que non ten puntos fixos. Entón, hai un vector $v \in E$ e unha afinidade $g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ que ten puntos fixos, de xeito que $f = \tau_v \circ g$.

Demostración. A condición do enunciado é equivalente a $\tau_{-v} \circ f = g$. Fixando un punto p , temos que se definimos $v = \mathbf{p}f(\mathbf{p})$ entón

$$\tau_{-v} \circ f(p) = \tau_{-v}(f(p)) = f(p) - v = f(p) - (f(p) - p) = p,$$

polo que p é un punto fixo. É suficiente entón con definir $g = \tau_{-v} \circ f$. \square

Como non hai puntos fixos, temos que 1 é valor propio. Podemos distinguir de novo tres casos segundo f diagonalice ou non.

- (i) A diagonaliza e $\alpha = 1$. Neste caso, f é unha translación de vector $v = f(p) - p$, onde p é un punto calquera. A forma reducida é entón

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nunha referencia da forma $\mathcal{R} = \{p; u_1, u_2\}$, onde p é un punto arbitrario, e $u_1 = f(p) - p$ e u_2 é un vector linealmente independente con u_1 . As rectas invariantes son todas as de vector director u_1 .

- (ii) A diagonaliza e o outro valor propio é $\alpha \neq 1$. Neste caso, f é unha homoloxía xeral seguida dunha translación. Sexan v_1 e v_2 vectores propios de valor propio 1 e α . Unha comprobación rutineira amosa que hai unha única recta invariante, que ten vector director v_1 . En efecto, se collemos como orixe un punto p arbitrario, na referencia $\{u_1, u_2; p\}$ a matriz é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & \alpha & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Collendo como orixe o punto $q = p + mv_1 + nv_2$, tense que

$$f(q) = q + (a, b + (\alpha - 1)n);$$

se collemos $n = -b/(\alpha - 1)$, temos que a segunda coordenada do vector é 0. Sexa agora p un punto calquera da recta invariante. A forma reducida, na referencia $\mathcal{R} = \{u_1, u_2; p\}$, é

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A única recta invariante, $p + t \cdot u_1$, chámase *eixe da homoloxía*.

- (iii) A non diagonaliza. Neste caso, f é unha homoloxía especial seguida dunha translación. Se collemos como orixe un punto p arbitrario e $\{u_1, u_2\}$ unha base de Jordan, na referencia $\{u_1, u_2; p\}$ a matriz é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & \alpha & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Collendo como orixe o punto $q = p + mv_1 + nv_2$, tense que

$$f(q) = q + (a + n, b);$$

se collemos $n = -a$, temos que a primeira coordenada do vector é 0 (en cambio, non podemos garantir que a primeira se poida escoller para que sexa 0, como no caso anterior).

A forma reducida é entón

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Non hai rectas invariantes.

Exemplo. Sexa $f(x, y) = (x + y, y + 1)$. Neste caso, a aplicación lineal asociada non diagonaliza xa que o 1 é un valor propio de multiplicidade alxébrica 2 e multiplicidade xeométrica 1. Podemos escribir $f = \tau \circ g$, onde $g(x, y) = (x + y, y)$ é unha homoloxía especial e $\tau(x, y) = (x, y + 1)$.

2.7. Clasificación de proxectividades en dimensión 1 e 2

Sexa (\mathbb{P}, E, π) un espazo proxectivo de dimensión n . Imos realizar agora un estudo análogo ao que levamos a cabo no caso das afinidades; na seguinte sección afondaremos na descrición xeral das homoloxías, neste caso proxectivas, en espazos de dimensión arbitraria.

Definición 2.7.1. Sexan $f, g: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ dúas homografías, con $f = [\varphi]$ e $g = [\psi]$. Dicimos que $f \sim g$ se existe unha homografía $h: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ de xeito que $g = h^{-1}fh$. Pondo $h = [\xi]$, isto é equivalente a dicir que $\psi = \lambda\xi^{-1}\varphi\xi$, con $\lambda \neq 0$.

Polo tanto, dúas proxectividades son equivalentes cando as súas formas de Jordan coinciden salvo multiplicación por escalar non nulo (é dicir, son iguais no proxectivizado do grupo lineal).

Convén ter en conta a idea de que as afinidades son aquelas proxectividades que fixan o hiperplano do infinito. É dicir, dada unha proxectividade e un hiperplano do infinito, esta induce unha afinidade se, e soamente se, o hiperplano é unha variedade invariante. Sexa $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, con $f = [\varphi]$, onde a dimensión de \mathbb{P} é 1. Segundo a matriz de Jordan J de φ temos 4 posibilidades diferentes.

- (a) Se $J = \text{diag}(a, a)$, con $a \neq 0$, entón a matriz de f na referencia asociada á base de Jordan é a identidade. Neste caso, tódolos puntos son fixos.
- (b) Se $J = \text{diag}(a, b)$, con $a \neq b$, entón a matriz de f na referencia asociada á base de Jordan é $[\text{diag}(1, \alpha)]$, con $\alpha \neq 1$. Neste caso, f ten exactamente dous puntos fixos diferentes. Se collemos un deles como punto do infinito, entón f provén dunha homotecia afín de centro o outro punto fixo e razón α .
- (c) Se $J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entón f ten un único punto fixo. Se o collemos como punto do infinito, temos que f provén dunha translación afín.
- (d) Se o polinomio característico non ten raíces, entón f non ten ningún punto fixo e f non provén de ningunha afinidade.

Convén observar que no caso das proxectividades da recta é posible ter exactamente dous puntos fixos, algo que non pasaba no caso afín. Por exemplo, se consideramos

$$f([x : y]) = [2x : y],$$

temos que os puntos fixos son o $[1 : 0]$ e o $[0 : 1]$, isto é, o 0 e o infinito.

Sexa agora $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, con $f = [\varphi]$ e \mathbb{P} de dimensión 2. Por simplicidade, imos restrinxirnos aos casos real e complexo. Temos sete posibilidades diferentes.

- (a) Se $J = \text{diag}(a, a, a)$, entón a matriz de f na referencia asociada á base de Jordan é a identidade e tódolos puntos son fixos.
- (b) Se $J = \text{diag}(a, b, b)$, con $a \neq b$, entón a matriz de f na referencia asociada á base de Jordan é $[\text{diag}(1, \alpha, \alpha)]$, con $\alpha \neq 1$. Neste caso, f ten unha recta de puntos fixos, $L = p_2 \vee p_3$, e un punto fixo $p_1 \notin L$. O feixe de rectas pasando por p_1 é un feixe de rectas invariantes por f . Neste caso, f é unha *homoloxía xeral* de eixe L e centro p_0 .

- (c) Se $J = \text{diag}(a, b, c)$, con a, b, c distintos, entón f ten tres puntos fixos, p_1 , p_2 e p_3 , e tres rectas invariantes por f , $p_1 \vee p_2$, $p_2 \vee p_3$ e $p_3 \vee p_1$. Collendo unha destas rectas como hiperplano do infinito, podemos entender a proxectividade como unha composición de homoloxías xerais no plano afín, que ten dúas rectas invariantes.

- (d) Se $J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ entón f ten unha recta de puntos fixos $L = p_1 \vee p_3$. Se $q = [x] \notin L$, con $x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$, entón $f(q) \in q \vee p_1$, polo que toda recta por p_1 é invariante por f . Neste caso dicimos que f é unha *homoloxía especial* de eixe L e centro p_1 .

Exemplo. Consideramos a homografía de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dada por

$$f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \quad [x : y : z] \mapsto [3x - y : x + y : 2z].$$

Se consideramos a matriz asociada (unicamente definida salvo multiplicación por un escalar non nulo), temos unha descomposición de Jordan da forma

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Se pomos $p_1 = [1 : 1 : 0]$, temos que tódalas rectas que pasan por p_1 son invariantes. Se $p_3 = [1 : 1 : 1]$, a recta $p_1 \vee p_3$ é a única recta invariante.

Convén observar que no caso afín, o punto p_1 de xeito que toda recta por el é invariante correspóndese co punto do infinito do eixe (tódalas paralelas a el son invariantes, polo que o punto común da intersección é fixo).

- (e) Se $J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, entón f ten dous puntos fixos, p_1 e p_3 , e dúas rectas invariantes por f , $p_1 \vee p_3$ e $p_1 \vee p_2$.

- (f) Se $J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ entón f ten un único punto fixo, p_1 , e unha recta invariante, $L = p_1 \vee p_2$.

Exemplo. Consideramos a homografía de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dada por

$$f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \quad [x : y : z] \mapsto [2x + z : x + y : -x + y + 3z].$$

Se consideramos a matriz asociada (unicamente definida salvo multiplicación por un escalar non nulo), temos unha descomposición de Jordan da forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Se pomos $p_1 = [1 : 1 : 0]$, temos que p_1 é o único punto fixo; e se $p_2 = [0 : 1 : -1]$, a recta $p_1 \vee p_2$ é a única recta invariante.

- (g) Se o polinomio característico ten unha única raíz real, entón f ten un único punto fixo, p_1 , e como recta invariante $L = p_2 \vee p_3$.

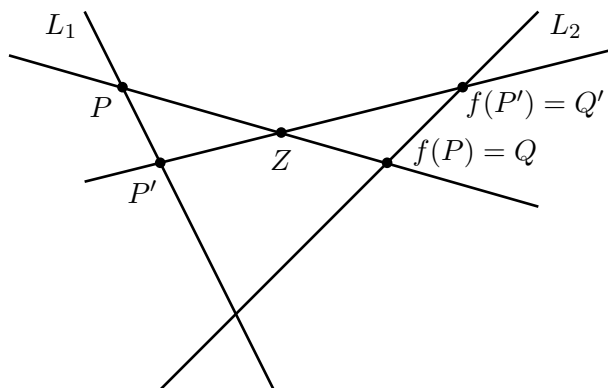
2.8. Perspectividades e homoloxías proxectivas

Do mesmo xeito que ao estudarmos as afinidades trabllamos algúns casos de especial relevancia e que tiñan un significado xeométrico importante (translacións, homotecias, proxeccións e simetrías), imos facer o mesmo no caso proxectivo. Nesta sección, en concreto, introducimos as perspectividades e as homoloxías. Por outro lado, desde o punto de vista da teoría de grupos, un problema xeral é atopar *xeradores*, isto é, elementos que nos permitan obter calquera outro do grupo mediante composicións sucesivas deles. Por exemplo, en $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, onde N é un enteiro, calquera número relativamente primo con N é un xerador; no grupo simétrico, as transposicións constitúen un sistema de xeradores, porque calquera permutación é produto de transposicións (non de xeito único). Aquí imos estudar certos resultados nesa dirección, que establecen que certas familias de proxectividades se poden ver como composicións de perspectividades ou de homoloxías.

Perspectividades: o caso dos hiperplanos

Imos comezar tratando un caso bastante particular, pero no que a interpretación xeométrica é máis doada. Sexa \mathbb{P} un espazo proxectivo e sexan L_1 e L_2 dous hiperplanos. Imos definir a noción de perspectividade neste contexto e establecer, a continuación, que as perspectividades son proxectividades, algo que non resulta evidente a partir da definición.

Definición 2.8.1. A *perspectividade* en \mathbb{P} de L_1 en L_2 de centro Z é a aplicación $f: L_1 \rightarrow L_2$ definida por $f(p) = q$, onde $\{p\} = (p \vee Z) \cap L_2$, para todo $p \in L_1$.



Proposición 2.8.1. Sexa $f: L_1 \rightarrow L_2$ unha perspectividade en \mathbb{P} de centro Z . Entón f é unha aplicación ben definida e é unha proxectividade. Ademais, $f^{-1}: L_2 \rightarrow L_1$ é unha perspectividade en \mathbb{P} de centro Z .

Demostración. Para ver que está ben definida, hai que ver que $(p \vee Z) \cap L_2$ é un punto. Como é a intersección de variedades lineais proxectivas, é unha variedade lineal proxectiva, polo que é suficiente con aplicar a fórmula de Grassmann e ver que a súa dimensión é 0. En efecto,

$$\dim((p \vee Z) \cap L_2) = \dim((p \vee Z) \vee L_2) - \dim(p \vee Z) - \dim(L_2) = n - 1 - (n - 1) = 0,$$

onde empregamos que a dimensión de $(p \vee Z) \vee L_2$ é n xa que é unha variedade lineal que contén L_2 e tamén o punto Z , que non pertence ao hiperplano.

Para ver que é unha proxectividade, temos que construír un isomorfismo φ do espazo vectorial subxacente E e comprobar que $f = [\varphi]$. Para iso, pomos $L_1 = [F_1]$, $L_2 = [F_2]$ e $Z = [\langle u \rangle]$, onde F_1 e F_2 son subespazos vectoriais de dimensión n e $u \in E$ é un vector non nulo. Ademais, tense que $E = F_1 \oplus \langle u \rangle = F_2 \oplus \langle u \rangle$. Sexa $\iota: F_1 \hookrightarrow F_1 \oplus \langle u \rangle$ a inclusión de F_1 en E e $\pi: E \rightarrow F_2$ a proxección inducida pola descomposición $E = F_2 \oplus \langle u \rangle$. Definimos entón $\varphi = \pi \circ \iota$, que é claramente lineal e tamén inxectiva. Para ver isto último, sexa $x = y + \lambda u \in F_1 \subset E$, onde $y \in F_2$. Se $\varphi(x) = 0$, temos que $0 = \pi(x) = y$, polo que $x = \lambda u$; é dicir, $x \in F_1 \cap \langle u \rangle = \{0\}$.
Imos establecer finalmente que $f = [\varphi]$. Sexa $p = [x] \in L_1$. Tense que

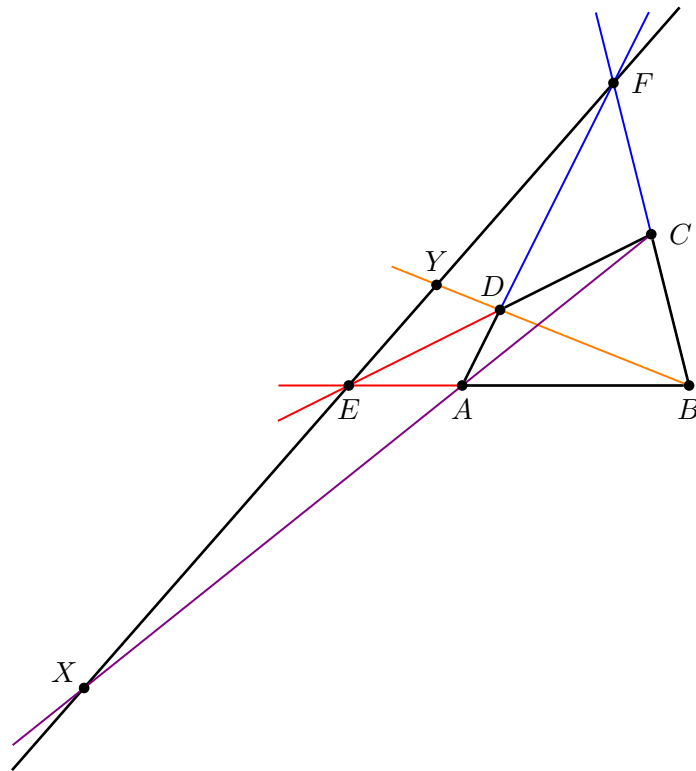
$$f(p) = (p \vee Z) \cap L_2 = [\langle x, u \rangle \cap F_2],$$

polo que $\langle x, u \rangle \cap F_2$ é un subespazo de dimensión 1, e existe un elemento non nulo y . Escribimos $y = ax + bu$, e tense que $a \neq 0$, xa que en caso contrario teríamos que $Z \in F_2$. Polo tanto $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}u$, e tense que

$$[\varphi(x)] = \left[\pi_2 \left(\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}u \right) \right] = \pi_2 \left[\frac{1}{a}y \right] = [y].$$

□

Exemplo. Sexa $ABCD$ un cuadrilátero no plano proxectivo real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Sexa E o punto de corte das rectas AB e CD , e sexa F o punto de corte das rectas AD e BC . As rectas AC e BD cortan EF nos puntos X e Y , respectivamente. Imos usar a noción de perspectividade para probar que $(E, F; X, Y)$ é unha cuaterna harmónica.



Sexa P o punto de corte das diagonais AC e BD . Consideremos a perspectividade de centro A que envía a recta EF á recta BD ; en particular, a imaxe do punto E é B , a do punto F é D , a do punto X é P e a do punto Y é el mesmo. Como é unha proxectividade,

conserva a razón dobre, polo que $(E, F; X, Y) = (B, D; P, Y)$. Consideramos agora a proxectividade de centro C que envía a recta BD á recta EF . Entón, a imaxe de B é F , a de D é E , a de P é X e a de Y é el mesmo. Usando de novo que se conserva a razón dobre, vemos que

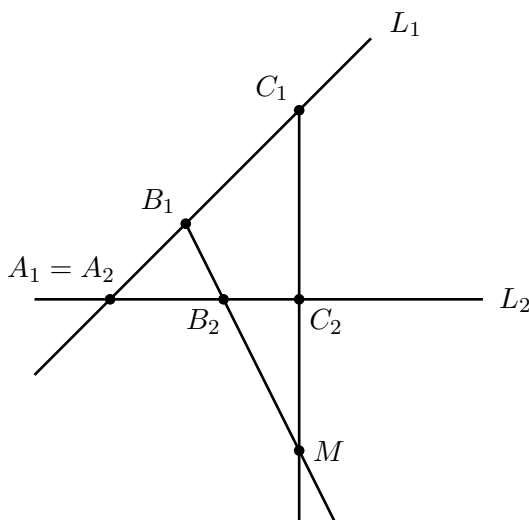
$$\rho := (E, F; X, Y) = (B, D; P, Y) = (F, E; X, Y) = \rho^{-1}.$$

Como $E \neq F$ e $X \neq Y$, entón a condición $\rho^2 = 1$ implica que $\rho = -1$, polo que $(E, F; X, Y)$ é unha cuaterna harmónica.

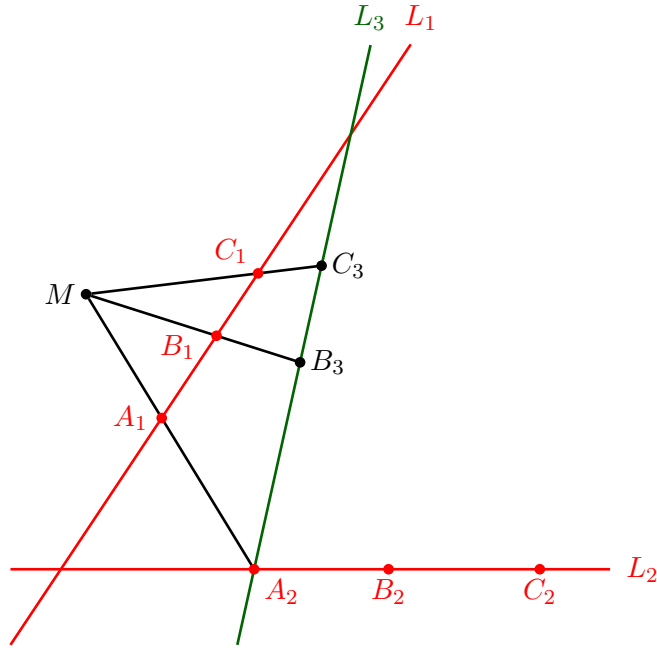
En particular, a composición de perspectividade é tamén unha proxectividade. O seguinte obxectivo é establecer que calquera proxectividade entre dúas rectas L_1 e L_2 dun plano proxectivo se pode escribir como composición de como moito tres perspectividade. Para iso, é clave o seguinte resultado.

Lema 2.8.1. Sexan L_1 e L_2 dúas rectas diferentes dun plano proxectivo \mathbb{P} . Sexan $\mathcal{R}_1 = \{A_1, B_1; C_1\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{A_2, B_2; C_2\}$ referencias de L_1 e L_2 , respectivamente. Se $A_1 = A_2$, existe unha perspectividade $f: L_1 \rightarrow L_2$ tal que $f(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$. Se $A_1 \neq A_2$, existe unha composición de dúas perspectividade $f: L_1 \rightarrow L_2$ tal que $f(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$.

Demostración. Se $A_1 = A_2$, definimos $M = B_1B_2 \cap C_1C_2$. Temos que $M \notin L_1, L_2$ e que a perspectividade $f: L_1 \rightarrow L_2$ de centro M cumpre que $f(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$.



Se $A_1 \neq A_2$, collemos $M = A_1A_2 \cap B_1B_2$ e L_3 unha recta que pasa por A_2 , de xeito que $L_3 \neq L_2$ e $M \notin L_3$. Sexa $g_{1,3}: L_1 \rightarrow L_3$ a perspectividade de centro M . Chamamos $A_3 := g_{1,3}(A_1) = A_2$, $B_3 := g_{1,3}(B_1)$, $C_3 := g_{1,3}(C_1)$ e $\mathcal{R}_3 := g_{1,3}(\mathcal{R}_1) = \{A_3, B_3; C_3\}$. Como $A_3 = A_2$, sabemos que existe unha perspectividade $g_{3,2}: L_3 \rightarrow L_2$ tal que $g_{3,2}(\mathcal{R}_3) = \mathcal{R}_2$. Deste xeito, $f = g_{3,2} \circ g_{1,3}: L_1 \rightarrow L_2$ é unha composición de dúas perspectividade tal que $f(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$.

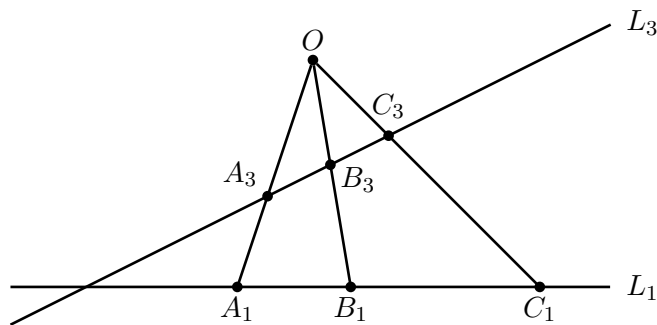


□

O seguinte resultado é o que se adoita coñecer como teorema de Poncelet.

Teorema 2.8.1 (Poncelet). Sexa $f: L_1 \rightarrow L_2$ unha proxectividade entre dúas rectas dun plano proxectivo \mathbb{P} . Entón, f é perspectividade ou ben é composición de dúas ou tres perspectividades.

Demostración. Sexa $\mathcal{R}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ unha referencia de L_1 . Como f é unha proxectividade, $\mathcal{R}_2 := f(\mathcal{R}_1)$ é unha referencia de L_2 . Se $L_1 \neq L_2$, sabemos que existe $g: L_1 \rightarrow L_2$ unha perspectividade ou composición de dúas perspectividades tal que $g(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$. Se $L_1 = L_2$, collemos unha recta L_3 de xeito que $L_1 \cap L_3 = \{A_1\}$, e collemos $\mathcal{R}_3 = \{A_3, B_3, C_3\}$ unha referencia de L_3 con $A_3 = A_1$. Entón, existe unha perspectividade $g_{1,3}: L_1 \rightarrow L_3$ con $g_{1,3}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_3$. Como $L_3 \neq L_2$, podemos asegurar que existe $g_{3,2}: L_3 \rightarrow L_2$ unha perspectividade ou composición de dúas perspectividades tal que $g_{3,2}(\mathcal{R}_3) = \mathcal{R}_2$.



Entón, $g = g_{3,2} \circ g_{1,3}: L_1 \rightarrow L_2$ é unha composición de dúas ou tres perspectividades tal que $g(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$. Finalmente, $g = g_{3,2} \circ g_{1,3}: L_1 \rightarrow L_2$ é unha composición de dúas ou tres perspectividades tal que $g(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$. Como $f: L_1 \rightarrow L_2$ é unha proxectividade con $f(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$ deducimos que $f = g$. □

O resultado tamén é certo no caso de hiperplanos en dimensión arbitraria, pero a demostración é máis complicada. Na seguinte sección imos considerar unha noción máis xeral de perspectividade que incluíra este caso. Porén, iso require desenvolver antes a teoría das homoloxías proxectivas.

Homoloxías proxectivas

Pasamos agora ao estudo das homoloxías proxectivas, que estenden os conceptos traballados no caso afín de homoloxía xeral e homoloxía especial. Como de costume, fixamos un espazo proxectivo (\mathbb{P}, E, π) de dimensión n .

Definición 2.8.2. Sexa H un hiperplano de \mathbb{P} . Unha *homoloxía* de eixe H é unha homografía $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ diferente da identidade e tal que todo punto de H é fixo por f .

No caso do plano afín, centrámonos no estudo de dous tipos, as xerais e as especiais. Nas homoloxías xerais había unha recta de puntos fixos e unha familia de rectas paralelas invariante (cunha dirección diferente á recta de puntos fixos); desde o punto de vista proxectivo, temos que o punto da recta do infinito no que se cortan esas rectas paralelas é fixo; isto quere dicir que existe un punto fixo de xeito que tódalas rectas que pasan por el son invariantes. No caso da homoloxía especial, as rectas invariantes son paralelas á recta de puntos fixos, polo que volvemos ter un punto no infinito tal que tódalas rectas que pasan por el son invariantes, só que agora, a diferenza do caso anterior, si pertence á recta de puntos fixos.

Lema 2.8.2. Sexa E un espazo vectorial de dimensión $n+1$ e f un endomorfismo de E de xeito que existe un subespazo $F \subset E$ que cumpre que, para todo $v \in F$, $f(v) = \lambda v$, onde λ é un escalar non nulo. Entón, existe un vector non nulo $u \in E$ de xeito que calquera subespazo vectorial de dimensión 2 que conteña u é invariante por f .

Demostración. Da condición do enunciado, sabemos que o polinomio característico de f descompón como $\text{Char}(f; X) = (-1)^{n+1}(X - \lambda)^n(X - \mu)$, para algún $\mu \in K$. Se $\mu \neq \lambda$, o endomorfismo diagonaliza e existe unha base de vectores propios $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$, onde v_1, \dots, v_n teñen valor propio λ e v_{n+1} . Neste caso, collemos $u = v_{n+1}$. Un subespazo de dimensión 2 que contén u é da forma $\{u, u'\}$, onde $u' = w + \nu \cdot v_{n+1}$ e $w \in F$ é diferente de 0. Entón, $\langle u, u' \rangle = \langle u, w \rangle$ é un subespazo invariante, xa que tanto u como w son vectores propios.

Se $\mu = \lambda$ e o endomorfismo diagonaliza, entón o argumento anterior tamén serve. Imos supor entón que non diagonaliza, polo que temos unha base de vectores propios xeralizados $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}\}$, onde $v_1, v_3, v_4, \dots, v_{n+1}$ son vectores propios de valor propio λ e v_2 é un vector propio xeralizado que cumpre $f(v_2) = \lambda v_2 + v_1$. É dicir, v_1 é un xerador da imaxe do morfismo

$$f_\lambda = f - \lambda \text{Id}: \frac{\ker(f - \lambda \text{Id})^2}{\ker(f - \lambda \text{Id})} \longrightarrow \ker(f - \lambda \text{Id}).$$

Collemos $u = v_1$, polo que un subespazo de dimensión 2 que contén u é da forma $\langle u, u' \rangle$, con $u' = \nu v_2 + w$, con $w \in \langle v_3, \dots, v_{n+1} \rangle$. Polo tanto,

$$\langle f(u), f(u') \rangle = \langle u, u + \lambda \nu v_2 + \lambda w \rangle = \langle u, \lambda(\nu v_2 + w) \rangle = \langle u, u' \rangle.$$

□

Proposición 2.8.2. Sexa $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ unha homoloxía. Existe un punto p de xeito que calquera recta que pasa por p é invariante por f .

Demostración. Sexa $H = [F]$ o hiperplano invariante por $f = [\varphi]$, onde F é un subespazo vectorial invariante por φ . Sexa entón $p = [\langle u \rangle]$ o punto obtido a través do lema anterior xa que, polas hipóteses do enunciado, a aplicación lineal cumpre esas condicións; é dicir, unha proxectividade ten un hiperplano de puntos fixos se, e soamente se, a aplicación lineal asociada é un múltiplo da identidade na restrición a un subespazo de codimensión un. Tense entón que se L é unha recta con $p \in L$, L é unha recta invariante porque se corresponde cun subespazo vectorial de dimensión 2 que contén u . \square

Convén insistir en que non é certo que no caso proxectivo unha recta con dous puntos fixos sexa de puntos fixos, pero si é invariante. O resultado anterior permite realizar a seguinte definición.

Definición 2.8.3. Un punto \mathcal{O} que cumpre a propiedade de que calquera recta que pasa por el é invariante pola homoloxía dise que é un *centro* da homoloxía. Cando $\mathcal{O} \notin H$ dise que f é unha *homoloxía xeral*. Cando $\mathcal{O} \in H$ chámase *homoloxía especial*.

O seguinte resultado establece que o centro dunha homoloxía está ben definido e polo tanto a definición anterior ten sentido.

Proposición 2.8.3. Sexa $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ unha proxectividade.

- (a) Se existen $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, con $p_1 \neq p_2$, e de xeito que toda recta que conteña p_1 ou p_2 é invariante por f , entón f é a identidade. En particular, se f é unha homoloxía, existe un único punto p de xeito que toda recta por p é invariante por f . Este punto é o *centro* da homoloxía.
- (b) Se f é unha homoloxía e existe un punto fixo p por f , con $p \notin H$, entón p é o centro de f e f é unha homoloxía xeral.

Demostración. (a) Sexan V_1 e V_2 dúas rectas diferentes polo punto p_1 . Entón, $f(p_1) \in f(V_1) \cap f(V_2) = V_1 \cap V_2 = \{p_1\}$, polo que p_1 é un punto fixo por f . O mesmo ocorre para p_2 . Sexan $q \notin p_1 \vee p_2$, $L_1 := p_1 \vee q$ e $L_2 := p_2 \vee q$. Entón $f(q) \in f(L_1) \cap f(L_2) = L_1 \cap L_2 = \{q\}$. En particular, f deixa invariante calquera referencia que conteña p_1 e p_2 ; iso quere dicir que f é a identidade.

Xa sabemos que unha homoloxía f ten un centro, que é un punto p que cumpre que toda recta por p é invariante por f . Ademais, vimos no apartado anterior que o centro é único. Como por hipótese f non é a identidade, pola primeira parte sabemos que ese punto ten que ser único.

- (b) Se f é unha homoloxía de eixe H e $p \notin H$ é un punto fixo por f , podemos coller como L calquera recta que pase por p . Como $p \notin H$, entón $L \cap H = q$ e $L = p \vee q$. Deste xeito, $f(L) = f(p \vee q) = f(p) \vee f(q) = p \vee q = L$. É dicir, p cumpre que toda recta por L é invariante por f . Polo apartado anterior, p ten que ser o centro de f . \square

Imos agora discutir cales son as posibles formas de Jordan das homoloxías, que é algo que xa se usou indirectamente ao probarmos que teñen un punto de xeito que tódalas rectas que pasan por el son invariantes.

Proposición 2.8.4. Sexa $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ unha proxectividade, con $f = [\varphi]$.

- (a) f é unha homoloxía xeral se, e soamente se, existe unha base $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ de E de xeito que a matriz asociada sexa $\text{diag}(a, a, \dots, a, b)$, para $a \neq b$ e ambos non nulos. Neste caso, $\mathcal{O} = [u_{n+1}]$ é o centro e $H = [\langle u_1, \dots, u_n \rangle]$ é o eixe.
- (b) f é unha homoloxía especial se, e soamente se, existe unha base \mathcal{B}_u de E de xeito que a matriz se pode escribir como unha matriz diagonal de tamaño $n - 1$ coa entrada $a \neq 0$ na diagonal e un bloque de Jordan de tamaño 2 asociado ao mesmo a . Neste caso, $\mathcal{O} = [u_n]$ é o centro e $H = [\langle u_1, \dots, u_n \rangle]$ é o eixe.

Demostración. (a) Supoñamos que f é unha homoloxía de centro $\mathcal{O} = [x]$ e eixe $H = [F]$. Collemos $\{u_1, \dots, u_n\}$ unha base de F . Como $\mathcal{O} \notin H$, entón $x \notin F$, polo que $\{u_1, \dots, u_n, x\}$ é unha base de E ; podemos pór neste caso $u_{n+1} := x$. Como $\mathcal{O} = [u_{n+1}]$ é un punto fixo por f , sabemos que x é un vector propio de φ de valor propio b , para algún $b \neq 0$. Como H é de puntos fixos por f , entón $[\varphi|F] = [\text{Id}]$, e temos entón que $\varphi|F = a \cdot \text{Id}$, para algún $a \neq 0$. Isto demostra que $F \subset \ker(\varphi - a \cdot \text{Id})$. Como $x \notin F$ e x é un vector propio de valor propio b , necesariamente sucede que $a \neq b$. Reciprocamente, se a matriz é como a descrita no enunciado, $H = [\langle u_1, \dots, u_n \rangle]$ é un hiperplano de puntos fixos por f e $\mathcal{O} = [u_{n+1}]$ é un punto fixo por f de xeito que $\mathcal{O} \notin H$.

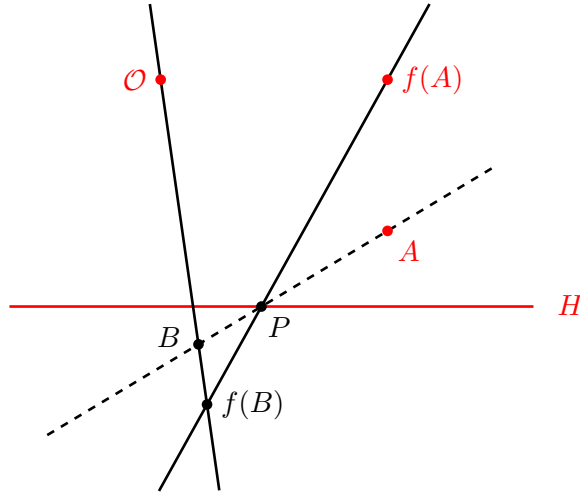
- (b) Supoñamos agora que f é unha homoloxía especial de centro $\mathcal{O} = [x]$ e eixe $H = [F]$. Collemos $\{u_1, \dots, u_n\}$ unha base de F . Como H é de puntos fixos por f , entón $[\varphi|F] = [\text{Id}]$, polo que $\varphi|F = b \cdot \text{Id}_F$, para algún $b \neq 0$. Deste xeito, $F \subset \ker(\varphi - b \cdot \text{Id})$ e u_1, \dots, u_n son vectores propios de φ de valor propio b . Completando u_1, \dots, u_n a unha base de E , obtemos unha base $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ de E . Como $\varphi(u_{n+1}) = au_{n+1} + v$, con $v \in F$, o polinomio característico de φ é $(a - X)(b - X)^n$, onde $a \neq 0$. Se a fose diferente de b , entonces existiría un vector propio de φ de valor propio a , e teríamos un punto fixo por f que non pertence a H . Deste xeito, $a = b$ e $F \subset \ker(\varphi - a \cdot \text{Id})$, pero ao mesmo tempo o núcleo non é igual a todo o espazo E xa que f non é a identidade. Polo tanto, $F = \ker(\varphi - a \cdot \text{Id})$ e a forma de Jordan é como a que se describiu no enunciado do resultado. Observamos que $F = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ e $H = [F]$. Ademais, para todo $q = [x] \notin H$, $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i u_i$, $f(q) = [ax + x_{n+1}e_n] \in q \vee [u_n]$. É dicir, toda recta por u_n é invariante por f . Reciprocamente, se a matriz é como a descrita no enunciado, $H = [\langle u_1, \dots, u_n \rangle]$ é un hiperplano de puntos fixos por f , e polo mesmo argumento vemos que $\mathcal{O} = [e_n]$ é o centro; como $\mathcal{O} \in H$, f é unha homoloxía especial. □

O seguinte resultado estende unha noción que xa consideráramos no caso afín, por exemplo para as homoloxías xerais. Nese caso, hai que determinar o eixe, a dirección e o factor de escala; isto é equivalente a escoller dous puntos aliñados e dicir que a recta que os determina e a dirección da homoloxía e que un deles se envía ao outro.

Proposición 2.8.5. Sexan H un hiperplano de \mathbb{P} e \mathcal{O}, A, A' tres puntos de \mathbb{P} aliñados e diferentes, con $A, A' \notin H$. Entón, existe unha única homoloxía $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ de centro \mathcal{O} , eixe H e tal que $f(A) = A'$.

Demostración. Comprobemos primeiro a unicidade. Sexa $B \notin H$, $B \notin \mathcal{O}A$. Sexa $P := AB \cap H$. Como $A, A', B \notin H$ e $P \in H$, entón P é diferente de A, A' e B . Como P é

fixo por f , $f(A) = A'$ e $B \in PA$, entón $f(B) \in f(PA) = PA'$. Como toda recta por \mathcal{O} é invariante por f , entón $f(B) \in \mathcal{O}B$. Polo tanto, $f(B) \in PA' \cap \mathcal{O}B$. Vexamos que PA' e $\mathcal{O}B$ son dúas rectas diferentes. De non ser así, entón $A' \in \mathcal{O}B$, onde \mathcal{O}, A', B son diferentes e $B \in \mathcal{O}A' = \mathcal{O}A$, o que é unha contradición. Así, $f(B) = PA' \cap \mathcal{O}B = [(AB \cap H) \vee A'] \cap \mathcal{O}B$ para todo punto B que non estea na recta $\mathcal{O}A$. Para atopar a imaxe dun punto C na recta $\mathcal{O}A$, collemos $B \in \mathcal{O}A$, do que xa coñecemos a imaxe, e facemos a mesma construción intercambiando A por B .



Supoñamos que $\mathcal{O} \notin H$. Collemos $p_1, \dots, p_n \in H$ linealmente independentes, con $p_i \notin \mathcal{O}A$. Sexa $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}, p_1, \dots, p_n; A\}$ e $\mathcal{R}' = \{\mathcal{O}, p_1, \dots, p_n; A'\}$. Tense que \mathcal{R} e \mathcal{R}' son referencias de \mathbb{P} , polo que existe unha única proxección f tal que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. É entón unha comprobación rutineira ver que f é unha homoloxía.

Supoñamos agora que $\mathcal{O} \in H$, e collamos $B \notin H$, $B \notin \mathcal{O}A$. Igual que antes, sexa $P = AB \cap H$ e $B' = PA' \cap \mathcal{O}B$. Sexan p_2, \dots, p_n puntos de H distintos de P , de xeito que $\mathcal{O}, p_2, \dots, p_n$ sexan linealmente independentes. Tense que $\mathcal{R} = \{A, \mathcal{O}, p_2, \dots, p_n; B\}$ e $\mathcal{R}' = \{A', \mathcal{O}, p_2, \dots, p_n; B'\}$ son dúas referencias de \mathbb{P} , e igual que antes hai unha única proxección f tal que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. Ao igual que no caso anterior, compróbase facilmente que f é unha homoloxía. \square

A seguinte proposición establece que as homoloxías son xeradores do grupo das proxeccións, isto é, que calquera homografía é composición dun número finito de homoloxías.

Proposición 2.8.6. Toda homografía é composición dun número finito de homoloxías.

Demostración. Sexa \mathcal{R} unha referencia de \mathbb{P} e $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ unha base adaptada. Hai un isomorfismo $\varphi: E \rightarrow E$ de xeito que $f = [\varphi]$, e sexa A a matriz de φ na base u . Consideramos as seguintes transformacións por filas: $t_{i,j}$ permuta as filas i e j ; $t_{i,i+j}$ súmalle á fila i a fila j ; t_{i,λ_i} multiplica por $\lambda \neq 0$ a fila i . A matriz A pódese reducir á identidade facendo transformacións por filas, polo que existen matrices elementais E_i de xeito que $E_r \cdots E_1 A = \mathbb{I}_{n+1}$. Polo tanto, A é o produto de matrices elementais, que teñen espazo de vectores propios de valor propio 1 igual a $\{x_i = x_j\}$, $\{x_j = 0\}$ ou $\{x_i = 0\}$. Polo tanto, f é composición de proxeccións que teñen un hiperplano de puntos fixos. \square

Perspectividades: o caso xeral

Imos agora estudar o teorema de Poncelet nun contexto máis xeral. A partir de agora, sexan L_1 e L_2 dúas variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} da mesma dimensión, con $0 \leq d \leq n-1$ e Z un complementario común de L_1 e L_2 , é dicir, $\mathbb{P} = L_i \vee Z$ e $L_i \cap Z = \emptyset$. É importante observar que ese complementario sempre existe: se F_1 e F_2 son dous subespazos vectoriais da mesma dimensión, sempre existe un subespazo G de xeito que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$.

Definición 2.8.4. A perspectividade de \mathbb{P} de centro Z e de L_1 en L_2 é a aplicación $f: L_1 \rightarrow L_2$ definida por $f(p) = q$, onde $\{q\} = (p \vee Z) \cap L_2$, para todo $p \in L_1$.

Ao igual que antes, compróbase que f está ben definida e que é unha proxectividade. De cara a establecer o teorema de Poncelet neste contexto, a clave é establecer que calquera homoloxía é composición de dúas perspectividades. Omitimos a demostración do seguinte resultado.

Lema 2.8.3. Sexan L unha variedade lineal de \mathbb{P} , con $\dim L = d$, $0 \leq d \leq n-1$ e $f: L \rightarrow L$ unha homoloxía. Entón, f é composición de dúas perspectividades.

O teorema de Poncelet séguese agora de combinar o resultado anterior co feito de que calquera homoloxía é composición de proxectividades.

Teorema 2.8.2 (Poncelet). Sexan L_1 e L_2 dúas variedades lineais de \mathbb{P} da mesma dimensión d , con $0 \leq d \leq n-1$. Sexa $f: L_1 \rightarrow L_2$ unha proxectividade. Entón, f é composición dun número finito de perspectividades.

Demostración. Sexa Z un complementario común de L_1 e L_2 en \mathbb{P} e sexa $f_Z: L_2 \rightarrow L_1$ a perspectividade de centro Z . Deste xeito, $f_Z \circ f: L_1 \rightarrow L_1$ é unha homografía. Sabemos que $f_Z \circ f = h_1 \circ \dots \circ h_r$, onde as h_i son homoloxías de L_1 . Así, $f = f_Z^{-1} \circ h_1 \circ \dots \circ h_r$, que é composición de perspectividades porque a inversa dunha perspectividade tamén o é e unha homoloxía é composición de dúas perspectividades. \square

2.9. Dualidade proxectiva

Un dos aspectos importantes dos espazos proxectivos é que existe unha dualidade entre puntos e hiperplanos; é dicir, podemos dotar ao conxunto dos hiperplanos da estrutura de espazo proxectivo. Para iso, imos partir dun espazo proxectivo $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, E, \pi)$ de dimensión n , e a modo de notación imos escribir

$$\pi: E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}, \quad x \mapsto \pi(x) = [x]_\pi.$$

Para definir o espazo proxectivo dual $\mathbb{P}^* = (\mathbb{P}^*, E^*, \pi^*)$ necesitamos definir os tres obxectos que compoñen a terna, e establecer que se cumpren as compatibilidades esixidas entre o conxunto \mathbb{P}^* e o espazo vectorial E^* .

Definición 2.9.1. O *dual* de \mathbb{P} é o conxunto $\mathbb{P}^* = \{H \mid H \text{ é un hiperplano de } \mathbb{P}\}$. O espazo vectorial E^* é o espazo dual de E . Finalmente, definimos

$$\pi^*: E^* \setminus \{0\}, \quad \omega \mapsto \pi^*(\omega) = [\omega]_{\pi^*} := [\ker(\omega)]_\pi.$$

É dicir, a un elemento non nulo do dual ω asignámoslle o hiperplano dado polo núcleo de ω . O seguinte resultado establece que a definición anterior é un espazo proxectivo. Para iso, recordamos a aplicación bilineal

$$\varphi: E \times E^* \longrightarrow K \quad (x, \omega) \mapsto \omega(x).$$

Se $F \subset E$ é un subespazo vectorial, podemos definir o *ortogonal* $F^\perp = \{\omega \in E^* \mid \varphi(x, \omega) = 0\}$; analogamente, se $G \subset E^*$, tamén podemos introducir $G^\perp \subset E$. Cúmprese que $F^{\perp\perp} = F$ e que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$. Ademais, o ortogonal intercambia sumas e interseccións: $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$ e $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.

Proposición 2.9.1. A terna $\mathbb{P}^* = (\mathbb{P}^*, E^*, \pi^*)$ define un espazo proxectivo de dimensión n .

Demostración. En primeiro lugar, temos que $\dim E^* = \dim E = n + 1$, polo que se \mathbb{P}^* é un espazo proxectivo a súa dimensión é n . Observamos ademais que π^* está ben definida, é dicir, $[\ker(\omega)]_\pi \in \mathbb{P}^*$. Para iso, observamos que $\omega: E \rightarrow K$ é non nulo, polo que a imaxe ten dimensión 1; en consecuencia, polo primeiro teorema de isomorfismo, $\ker \omega \subset E$ é un subespazo cuxa dimensión coincide con $(n + 1) - 1 = n$ e define entón un hiperplano.

Veremos agora que π^* é sobrexectiva. Sexa $H \in \mathbb{P}^*$, con $H = [F]_\pi$, sendo F un subespazo de dimensión n . Cómpre atopar $\omega \in E^* \setminus \{0\}$ de xeito que $\ker \omega = F$. Observamos que $F^\perp \subset E^*$ ten dimensión 1, e podemos considerar un xerador arbitrario, ao que chamamos ω . Entón, cúmprese que $F \subset \ker(\omega)$, xa que se $x \in F$, entón $\omega(x) = 0$ por definición de ω ; como $\dim F = \dim \ker(\omega)$, conclúese que son iguais. Polo tanto, $[F]_\pi = [\ker(\omega)]_\pi = [\omega]_{\pi^*}$.

Finalmente, que ver que $\pi^*(\omega) = \pi^*(\omega')$ se, e soamente se, existe $\lambda \in K \setminus \{0\}$ con $\omega = \lambda\omega'$. Se $\omega = \lambda\omega'$, entón $\ker(\omega) = \ker(\omega')$ e a conclusión é clara. Reciprocamente, se $\pi^*(\omega) = \pi^*(\omega')$, entón $\ker(\omega) = \ker(\omega') =: F$. Entón, $F \subset \ker(\omega)$ e $F \subset \ker(\omega')$, o que quere dicir que $\omega, \omega' \in F^\perp$; como $\dim(F^\perp) = 1$, tense que $\omega = \lambda\omega'$. \square

Variedades lineais proxectivas duais

O obxectivo principal desta parte é describir cales son as variedades lineais proxectivas do espazo dual $\mathbb{P}^* = (\mathbb{P}^*, E^*, \pi^*)$. Neste caso, existe unha bixección entre os subespazos vectoriais de dimensión $d + 1$ de E e os subespazos vectoriais de dimensión $n - d$ de E^* .

Proposición 2.9.2. Para todo $-1 \leq d \leq n$, temos bixecciones entre os seguintes obxectos: variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} de dimensión d ; subespazos vectoriais de E de dimensión $d + 1$; subespazos vectoriais de dimensión $n - d$ de E^* ; e variedades lineais proxectivas de dimensión $n - d - 1$ de \mathbb{P}^* .

Demostración. Comezamos observando que hai unha bixección entre os subespazos vectoriais de E de dimensión $d + 1$ e as variedades lineais proxectivas de \mathbb{P} de dimensión d . Esta bixección envía un subespazo F a $\pi(F \setminus \{0\})$; e unha variedade lineal proxectiva L a $\pi^{-1}(L) \cup \{0\}$. Polo mesmo motivo, hai unha bixección entre os subespazos vectoriais de E^* de dimensión $n - d$ e as variedades lineais proxectivas de \mathbb{P}^* de dimensión $n - d - 1$. A continuación, tense tamén unha bixección entre subespazos de dimensión $d + 1$ de E e subespazos de dimensión $(n + 1) - (d + 1) = n - d$ de E^* , dada por enviar F a F^\perp . Polo tanto, se $L = [F]$ é unha variedade lineal proxectiva de \mathbb{P} , asociámoslle o subespazo F de dimensión $d + 1$ en E , o subespazo F^\perp de dimensión $n - d$ en E^* ; e a variedade lineal proxectiva $L^* := [F^\perp]_{\pi^*}$ de \mathbb{P}^* . \square

Por conseguinte, podemos definir a variedade dual dunha variedade lineal proxectiva.

Definición 2.9.2. A variedade lineal proxectiva $L^* = [F^\perp]$ chámase a *variedade dual de L* ou *feixe de hiperplanos por L* . A variedade lineal proxectiva $W^* = [G^\perp]$ chámase a *variedade dual de W* ou tamén o *núcleo do feixe de hiperplanos W* .

O nome de *feixe de hiperplanos* explícase do seguinte xeito. Sexa $L^* = [F^\perp]_{\pi^*}$. Polo tanto,

$$L^* = \{[\ker(\omega)]_\pi \mid \omega \in F^\perp \setminus \{0\}\} = \{H \in \mathbb{P}^* \mid H \supset L\}.$$

É inmediato comprobar que tomar duais é unha involución que intercambia as unións e as interseccións. É dicir, se L_1 e L_2 son variedades lineais proxectivas, entón se $L = L_1 \cap L_2$, tense que $L^* = L_1^* \vee L_2^*$; e se $L = L_1 \vee L_2$, entón $L^* = L_1^* \cap L_2^*$.

O principio de dualidade

O *principio de dualidade* fai referencia ao que chamaremos *frases dualizables*, que son enunciados nos que interveñen variedades L_1, \dots, L_r de \mathbb{P} e nas que só interveñen as dimensión, inclusións, contencións, interseccións e sumas das variedades. A *frase dual* é a que se obtén por cambiar as variedades polas súas duais, dimensión d por dimensión $n - d - 1$, inclusión por contención, contención por inclusión, intersección por suma e suma por intersección.

Teorema 2.9.1 (Principio de dualidade). Se $\mathcal{F}(L_1, \dots, L_r)$ é unha frase dualizable, entón $\mathcal{F}(L_1, \dots, L_r)$ é certa se, e soamente se, $\mathcal{F}^*(L_1^*, \dots, L_r^*)$ é certa. Máis en xeral, se o enunciado $\mathcal{H}(L_1, \dots, L_r)$ implica $\mathcal{T}(L_1, \dots, L_r)$ é certo en calquera espazo proxectivo de dimensión n e para variedades lineais arbitrarias L_1, \dots, L_r , entón o enunciado dual $\mathcal{H}^*(L_1, \dots, L_r)$ implica $\mathcal{T}^*(L_1^*, \dots, L_r^*)$ é certo en calquera espazo proxectivo de dimensión n e para variedades lineais arbitrarias V_1, \dots, V_r .

Demostración. Comezamos observando que se $\mathcal{F}(L_1, \dots, L_r)$ é unha frase certa, entón $\mathcal{F}^*(L_1^*, \dots, L_r^*)$ tamén o é. Para comprobalo, podemos ir caso por caso: se a dimensión de L é d , a de L^* é $n - 1 - d$; se $L_1 \subset L_2$, entón $L_1^* \supset L_2^*$; se $L = L_1 \vee L_2$, $L^* = L_1^* \cap L_2^*$; e se $L = L_1 \cap L_2$, temos que $L^* = L_1^* \vee L_2^*$.

Sexan agora $L_1, \dots, L_r \subset \mathbb{P}^n$ as variedades lineais proxectivas implicadas no enunciado. Como $\mathcal{H}^*(L_1, \dots, L_r)$ é certa, o enunciado dual $\mathcal{H}^{**}(L_1^*, \dots, L_r^*)$ tamén o é. Este enunciado coincide con $\mathcal{H}(L_1^*, \dots, L_r^*)$, e usando as condicións do enunciado, de aquí séguese que $\mathcal{T}(L_1^*, \dots, L_r^*)$ tamén se cumpre. Se agora collemos o dual, quedáanos que $\mathcal{T}^*(L_1^{**}, \dots, L_r^{**}) = \mathcal{T}^*(L_1, \dots, L_r)$ tamén é certo, como queríamos ver. \square

Exemplo. Sexan L_1 e L_2 dous puntos no espazo proxectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Entón, $L_1 \vee L_2$ é unha recta. Este enunciado, que é certo, admite o seguinte enunciado como dual: sexan L_1 e L_2 dous planos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Entón, $L_1 \cap L_2$ é unha recta. O principio de dualidade **non** é certo no espazo afín: neste caso, a intersección de dous planos paralelos no espazo pode ser baleira se estes son paralelos.

Exemplo. Sexa ABC un triángulo en \mathbb{P}_K^2 . Isto é, A , B e C son tres puntos diferentes non aliñados no plano. Os duais de A , B e C son tres rectas diferentes e non concorrentes, porque se pasasen por un mesmo punto, este corresponderíase cunha liña que contén A , B e C . É dicir, o dual de tres puntos non aliñados no plano son tres rectas non concorrentes, que tamén definen un triángulo.

Como primeira aplicación, imos establecer o recíproco do teorema de Desargues.

Proposición 2.9.3. Sexan ABC e $A'B'C'$ dous triángulos dun plano proxectivo. Supoñamos que $A \neq A'$, $B \neq B'$ e $C \neq C'$. Supoñamos tamén que $AB \neq A'B'$, $BC \neq B'C'$ e $CA \neq C'A'$. Se os puntos $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$ e $AB \cap A'B'$ están aliñados, entón as rectas AA' , BB' e CC' concorren.

Demostración. O resultado séguese dualizando o teorema de Desargues. \square

Igual que no espazo dual definimos de xeito natural unha base dual, no espazo dual proxectivo podemos definir unha referencia dual. Sexa $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ unha referencia de \mathbb{P} e $\mathcal{B}_e = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ unha base adaptada.

Definición 2.9.3. O conxunto

$$\mathcal{R}^* = \{[e_1^*]_{\pi^*}, \dots, [e_{n+1}^*]_{\pi^*}; [e_1^* + \dots + e_{n+1}^*]_{\pi^*}\}$$

é unha referencia de \mathbb{P}^* e \mathcal{B}_e^* é unha base adaptada. Falamos neste caso de *referencia dual*.

Proposición 2.9.4. Sexa H un hiperplano de \mathbb{P} . A ecuación de H na referencia \mathcal{R} é $\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0$ se, e soamente se, as coordenadas de H na referencia \mathcal{R}^* , como elemento de P^* , son $[(a_1, \dots, a_{n+1})]$.

Demostración. Sexa $H: a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$ e $\omega = a_1 e_1^* + \dots + a_{n+1} e_{n+1}^*$. Entón,

$$\omega(x_1 e_1 + \dots + x_{n+1} e_{n+1}) = a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}.$$

Polo tanto, $H = [\ker(\omega)]_{\pi} = [\omega]_{\pi^*}$. Isto indícanos que como ω ten compoñentes $[a_1 : \dots : a_{n+1}]$, entón H ten coordenadas $[a_1 : \dots : a_{n+1}]$ en \mathcal{R}^* .

Reciprocamente, se as coordenadas no dual de H son $[a_1 : \dots : a_{n+1}]$, entón $H = [\omega]_{\pi^*} = [\ker(\omega)]_{\pi}$, con $\ker(\omega) = \{x_1 e_1 + \dots + x_{n+1} e_{n+1} \mid a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = 0\}$. Polo tanto, H ten ecuación $a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$ en \mathcal{R} . \square

Isto permite definir a razón dobre de 4 hiperplanos que se intersecan nunha variedade lineal proxectiva de dimensión $n - 2$.

Definición 2.9.4. Sexan H_1, H_2, H_3 e H_4 catro hiperplanos dun espazo proxectivo \mathbb{P} , de xeito que hai polo menos tres diferentes, e que teñen por intersección unha variedade lineal proxectiva de dimensión $n - 2$. Sexan H_1^*, H_2^*, H_3^* e H_4^* os puntos correspondentes en \mathbb{P}^* . Entón, defínese

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) := (H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*).$$

O concepto está ben definido xa que, ao cortarse nunha variedade de dimensión $n - 2$, o dual é precisamente unha recta. Unha comprobación rutineira con coordenadas amosa que se L é unha recta de xeito que $\dim(H_i \cap L) = 0$, pondo $L_i = H_i \cap L$, cúmprese que

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = (L_1, L_2, L_3, L_4).$$

Exemplo. Sexan H_1, H_2, H_3, H_4 os hiperplanos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ dados por $H_1: x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$, $H_2: x_2 + x_4 = 0$, $H_3: x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, $H_4: x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Entón, as coordenadas no dual son $[1 : 0 : -1 : 2]$, $[0 : 1 : 0 : 1]$, $[1 : -2 : -1 : 0]$ e $[1 : -1 : -1 : 1]$, respectivamente. Un cálculo inmediato amosa que a razón dobre $(H_1, H_2; H_3, H_4) = 2$.

Imos discutir agora o comportamento do principio de dualidade en relación coas proxeccións. Para iso, sexan (\mathbb{P}, E, π) e (\mathbb{P}', E', π') dous espazos proxeccións da mesma dimensión.

Definición 2.9.5. O dual da proxección $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ é a aplicación $f^*: (\mathbb{P}')^* \rightarrow \mathbb{P}^*$ tal que, se H' é un hiperplano de $(\mathbb{P}')^*$, entón $f^*(H') = f^{-1}(H')$.

Tense que f^* está ben definida porque, como f é bixectiva, a preimaxe de H' é un hiperplano de \mathbb{P} . A demostración da seguinte proposición é inmediata a partir da definición.

Proposición 2.9.5. Sexa $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ unha proxección, e sexa $f^*: \mathbb{P}'^* \rightarrow \mathbb{P}^*$ a proxección dual.

- (a) Se L é unha variedade lineal proxección invariante por f , entón L^* é invariante por f^* .
- (b) Se ω é unha variedade lineal proxección invariante por f^* , entón ω^* é invariante por f .

2.10. Demostración dos teoremas fundamentais da xeometría afín e da xeometría proxección

Sección incompleta, pendente de acabar.

A demostración farase en varias etapas. A continuación mostramos un esquema dos pasos principais.

1. Sexan \mathbb{A}_1 e \mathbb{A}_2 espazos afíns de dimensión 2 sobre os K -espazos vectoriais E_1 e E_2 . Supoñamos que $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Entón, unha aplicación bixectiva $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ que leve puntos aliñados a puntos aliñados leva bixectivamente rectas a rectas.
2. f leva rectas paralelas en rectas paralelas.
3. \tilde{f}_P é aditiva.
4. \tilde{f}_P compórtase do xeito buscado cos escalares.

Proposición 2.10.1. Sexan \mathbb{A}_1 e \mathbb{A}_2 espazos afíns de dimensión 2 sobre os K -espazos vectoriais E_1 e E_2 . Supoñamos que $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Entón, unha aplicación bixectiva $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ que leve puntos aliñados a puntos aliñados leva bixectivamente rectas a rectas.

Demostración. Hai que comprobar que f leva de xeito bixectivo hiperplanos a hiperplanos. Unha vez demostramos iso, podemos restrinxir f a un hiperplano, polo que estamos entón nas hipóteses do teorema cunha dimensión menos, e podemos seguir así co proceso ata chegar a dicir que f leva bixectivamente rectas en rectas. Sexa L un hiperplano de \mathbb{A}_1 . Sexan p_1, \dots, p_n puntos que xeran o hiperplano, é dicir, de xeito que $L = p_1 + \langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_n \rangle$, sendo $n - 1$ a dimensión de L . Sexa L' a variedade lineal xerada polos puntos diferentes $p'_i = f(p_i)$. Como puntos aliñados van a puntos aliñados, cúmprese que $f(L) \subset L'$. Para velo, definimos $L_i = L_1 + [\langle e_2, \dots, e_i \rangle]$, con $e_i = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_i$. Como $L = L_n$, para demostrar que $f(L) \subset L'$, farémolo por indución sobre i . Se $i = 2$, como L_1 é a recta determinada por p_1 e p_2 , tense que $f(L_1) \subset L'$.

Supoñamos que $f(L_k) \subset L'$. Para demostrar que $f(L_{k+1}) \subset L'$, collemos un punto arbitrario $x \in L_{k+1}$, polo que podemos pór $x = x_0 + \lambda e_{k+1}$, con $X_0 \in L_k$. Consideramos un punto $Y = p_1 + \epsilon e_{k+1}$, con $\epsilon \neq 0, \lambda$ (o corpo ten máis de dous elementos). Como y pertence á recta determinada por p_1 e p_{k+1} , tense que $y' = f(y) \in L'$. Un cálculo rutineiro amosa que $t = x + t\mathbf{x}y$, con $t = \lambda/(\lambda - \epsilon)$, pertence a L_k . Polo tanto, $t' = f(t) \in L'$. Como os puntos x, y, t están aliñados, os puntos $x' = f(x), y'$ e t' están aliñados, e polo tanto $x' \in L'$. Iso demostra que $f(L_{k+1}) \subset L'$ e, por indución, $f(L) \subset L'$.

Queda ver que $f(L) = L'$ e que a dimensión de L' é $n-1$, para así asegurar que a imaxe dun hiperplano é un hiperplano. Collemos $z' \in L'$. Sabemos que existe z con $f(z) = z'$, e supoñamos que $z \notin L$. Collamos un punto arbitrario $x \in \mathbb{A}_1$. Se a recta determinada polos puntos xz corta L nun punto y , entón $y' = f(y) \in L'$. Como tamén $z' \in L'$ e $x' = f(x)$ pertence á recta determinada por y' e z' , ten que pasar que $x' \in L'$. Se a recta determinada polos puntos xz non corta L , entón $\mathbf{z}\mathbf{x} \in \langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_n \rangle$. Collemos logo un punto $t = z + \lambda\mathbf{z}\mathbf{x}$, con $\lambda \neq 0, 1$ (xa que K ten máis de dous elementos). Sexa $q = p_1 + \mathbf{z}\mathbf{x} \in L$. Entón as rectas p_1z e qt córtanse nun punto w , que está aliñado con p_1 e z . Entón, $w' = f(w) \in L'$. Como t está aliñado con q e w , $t' = f(t) \in L'$. Finalmente, como x está aliñado con t e z temos que $x' \in L'$. Polo tanto, temos que $x' \in L'$, é dicir, $f(\mathbb{A}_1) \subset L'$, o que contradice a bixectividade de f . Polo tanto, $z \in L$ e probamos entón que $f(L) = L'$. \square

Proposición 2.10.2. Cúmrense as seguintes propiedades:

- (a) A aplicación f leva rectas paralelas a rectas paralelas.
- (b) \tilde{f}_p é aditiva.
- (c) \tilde{f}_p respecta a multiplicación por escalares.

Demostración. Se $n = 2$ isto é evidente por ser f inxectiva. Sexan r_1 e r_2 dúas rectas paralelas de \mathbb{A}_1 diferentes, con $\dim \mathbb{A}_1 = n > 2$. Collemos puntos diferentes a, b sobre r_1 e c sobre r_2 . Sexa $d = c + \mathbf{a}\mathbf{b} \in r_2$. Collemos $y \in ad$ diferente de a e d , que se pode facer xa que $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Chamamos r_3 á recta ac , r_4 á recta yb e r_5 á recta ad .

As rectas r_3 e r_4 córtanse nun punto x diferente de a , xa que tódalas rectas descritas ata o de agora están no plano $\Sigma: a + \langle \mathbf{a}\mathbf{b}, \mathbf{a}\mathbf{c} \rangle$, e os vectores directores de r_3 e r_4 , $\mathbf{a}\mathbf{c}$ e $\mathbf{b}y$, son linealmente independentes. \square

2.11. Problemas

Afinidades.

Problema 2.1. Fixados dous puntos M e N dun plano afín \mathbb{A} sobre un corpo de característica diferente de 3, sexa $f_{M,N}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ a aplicación que envía un punto P calquera ao baricentro de M, P e N . Determinar se f é unha afinidade.

Solución. Fixamos unha referencia na que a orixe sexa M , o primeiro vector \mathbf{MN} e o segundo vector \mathbf{MN}' , para un N' arbitrario fóra da recta MN . Polo tanto, a aplicación f correspóndese, en coordenadas, con

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+1}{3}, y \right) = \left(\frac{1}{3}, 0 \right) + \frac{1}{3}(x, y),$$

isto é, a imaxe dun punto calquera $P = M + v$ é $f(P) = f(M) + \tilde{f}(v)$, onde $\tilde{f} = \frac{1}{3}\text{Id}$, que é lineal. Iso quere dicir que f é unha afinidade.

Problema 2.2. Dados catro puntos A, B, C, D dun plano afín real \mathbb{A} de xeito que tres calquera forman un triángulo, determinar que a condición necesaria e suficiente para que exista unha afinidade $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tal que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$ e $f(D) = A$ é que A, B, C, D sexan os vértices consecutivos dun paralelogramo.

Solución. Fixamos a referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AD}; A\}$, e supoñamos que as coordenadas de C son (a, b) . Sexa f a única aplicación afín que cumpre que $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(D) = A$; a aplicación é única xa que existe unha única aplicación afín que tome uns certos valores fixados sobre unha referencia. Como $C = A + a\mathbf{AB} + b\mathbf{AD}$, temos que

$$\begin{aligned} f(C) &= f(A) + a(f(B) - f(A)) + b(f(D) - f(A)) \\ &= B + a(C - B) + b(A - B) \\ &= bA + (1 - a - b)B + aC \end{aligned}$$

A condición $D = f(C)$ é polo tanto equivalente a

$$(0, 1) = (1 - a - b)(1, 0) + a(a, b),$$

de onde temos que

$$\begin{cases} 0 = 1 - a - b + a^2 \\ 1 = ab. \end{cases}$$

Substituíndo na primeira ecuación $b = 1/a$, quedanos que

$$a^3 - a^2 + a - 1 = (a - 1)(a^2 + 1) = 0,$$

cuxa única solución real é $a = 1$.

Problema 2.3. Consideramos a afinidade de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que nunha referencia ten por ecuacións

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y + 2. \end{cases}$$

- Encontrar os puntos fixos.
- Calcular a imaxe da recta $2x + 3y = 1$.
- Calcular a preimaxe da recta $x' = 1$.
- Hai rectas invariantes?

Solución. (a) Facendo $(x', y') = (x, y)$ temos que o único punto fixo é $(x, y) = (-2, -1)$

- A imaxe do punto $(-1, 1)$ é $(-3, 2)$. A imaxe do vector director $(3, -2)$ pola aplicación lineal asociada é $(5, 1)$, polo que a recta é

$$r: (3, -2) + t \cdot (5, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Para achar o vector director, facemos a preimaxe do $(0, 1)$ pola aplicación lineal asociada. Resolvendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

temos $(a, b) = (1/2, 1/2)$. Un punto de paso da recta é o $(1, 0)$, e para facer a preimaxe facemos

$$(x - y - 1, x + y + 2) = (1, 0),$$

de onde vemos que $(x, y) = (0, -2)$. Polo tanto, a recta é

$$(0, -2) + t(1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (d) Non hai rectas invariantes xa que a aplicación lineal asociada non ten ningún valor propio real.

Problema 2.4. Consideramos a afinidade de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que nunha referencia ten por ecuacións

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \\ z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1. \end{cases}$$

- (a) Encontrar os puntos fixos e as rectas invariantes.

- (b) Calcular a imaxe da recta

$$x = \frac{y - 2}{2} = \frac{z + 1}{3}.$$

- (c) Calcular a preimaxe do plano $x' - y' - z' = 2$.

Solución. (a) Para atopar os puntos fixos pomos $(x, y, z) = (x', y', z')$. Deste xeito obtense un sistema compatible indeterminado, de xeito que o sistema de solucións correspóndese coa recta

$$r: (1/2, 0, -1/2) + t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para as rectas invariantes, usamos que o polinomio característico da parte lineal é $-(X - 1)(X + 1)^2$. O subespazo propio correspondente ao valor propio 1 é o $\langle(1, 1, 1)\rangle$, polo que hai que analizar para que valores (a, b, c) se cumpre que a recta $(a, b, c) + t(1, 1, 1)$ é invariante. Iso é equivalente a que $(a', b', c') - (a, b, c)$ sexa múltiplo de $(1, 1, 1)$, é dicir:

$$\left(-\frac{4}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c + 1, \frac{2}{3}a - \frac{4}{3}b + \frac{2}{3}c, \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{4}{3}c - 1\right) \in \langle(1, 1, 1)\rangle.$$

Igualando as tres compoñentes do vector, temos que a condición é equivalente a que (a, b, c) pertenza á recta de puntos fixos. Polo tanto, a única recta invariante nesa dirección é a $(1/2, 0, -1/2) + t(1, 1, 1)$.

Para o valor propio -1 , o subespazo propio ten por ecuacións $x + y + z = 0$, polo que está xerado polos vectores $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$. Entón, un vector propio de valor propio -1 vén dado por $(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)$, e hai que impoñer agora que $(a', b', c') - (a, b, c)$ sexa un múltiplo de $(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)$:

$$\left(-\frac{4}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c + 1, \frac{2}{3}a - \frac{4}{3}b + \frac{2}{3}c, \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{4}{3}c - 1\right) \in \langle(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)\rangle.$$

En particular, como o vector $(a', b', c') - (a, b, c)$ xa está no plano $x + y + z = 0$, chega con impoñer que $\mu(b' - b) = \lambda(c' - c)$. A condición que se obtén é que (a, b, c) ten que pertencer ao plano

$$(\lambda - \mu)x + (\lambda + 2\mu)y + (-2\lambda - \mu)z - \frac{3}{2}z = 0.$$

Unha maneira de interpretar o resultado é a seguinte. Se consideramos o plano que contén a recta de puntos fixos r e que ten tamén a $(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)$ como vector director, calquera recta na dirección $(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)$ ten un punto fixo (a súa intersección con r) e a súa imaxe pola afinidade ten a mesma dirección. Polo tanto, é unha paralela á recta inicial e comparte un punto con ela, polo que ten que ser a mesma. Polo tanto, o que estamos a dicir é que as rectas do plano

$$\begin{vmatrix} x - 1/2 & 1 & \lambda + \mu \\ y & 1 & -\lambda \\ z + 1/2 & 1 & -\mu \end{vmatrix} = 0$$

que teñen a dirección $(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)$ son invariantes. Polo tanto, para cada elección de λ e μ hai un plano no que tódalas rectas que teñen o vector director $(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)$ son invariantes.

- (b) Podemos proceder de dúas maneiras. Comezamos observando que a imaxe do punto $(0, 2, -1)$ é $(5/3, -4/3, 2/3)$. Por outro lado, o vector director da recta é $(1, 2, 3)$; a súa imaxe pola aplicación lineal asociada é $(3, 2, 1)$. Alternativamente, podemos calcular a imaxe dun segundo punto, por exemplo o $(1, 4, 2)$, que é $(14/3, 2/3, 5/3)$ e calcular o vector que une os dous puntos, obtendo en calquera caso que a dirección da recta é $(3, 2, 1)$. Polo tanto, a imaxe é

$$(5/3, -4/3, 2/3) + t(3, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (c) O subespazo director do plano é o $\langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$. A imaxe do $(1, 1, 0)$ pola aplicación lineal asociada á afinidade é o $(1/3, 1/3, 4/3)$ e a do $(1, 0, 1)$ é $(1/3, 4/3, 1/3)$. Por outro lado, un punto do plano é o $(2, 0, 0)$, que ten por imaxe o punto $(1/3, 4/3, 1/3)$. Polo tanto, o plano buscado é o

$$\begin{vmatrix} x - 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ y - 4/3 & 1/3 & 4/3 \\ z - 1/3 & 4/3 & 1/3 \end{vmatrix} = 0.$$

Operando, vemos que a imaxe do plano está dada por

$$5x - y - z = 0.$$

Problema 2.5. Sexa $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ a afinidade de ecuacións na referencia natural

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2y - 3 \\ z' = -x + 2z - 1. \end{cases}$$

Encontrar tódolos planos invariantes por f .

Solución. Sexa \tilde{A} a matriz ampliada correspondente á afinidade f :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un plano en dimensión 3 é tamén un hiperplano, polo que é suficiente con achar os vectores propios de \tilde{A}^t . Temos que

$$\begin{aligned}\text{Char}(\tilde{A}^t; X) &= X^4 - 5X^3 + 7X^2 - X - 2 \\ &= (X - 1)(X - 2)(X - (1 + \sqrt{2}))(X - (1 - \sqrt{2})).\end{aligned}$$

O subespazo de vectores propios correspondente ao valor propio 1 é o $(0, 0, 0, 1)$; isto non define un hiperplano afín, senón que unicamente xustifica o feito de que o hiperplano do infinito é invariante, como sucede con calquera afinidade.

Para cada un dos outros tres valores propios si obtemos planos invariantes. Para o valor propio 2, temos que $(0, 1, 1, -4)$ é un vector propio, polo que

$$\pi_1: y + z - 4 = 0$$

é invariante. De xeito análogo, temos

$$\pi_2: (\sqrt{2} - 1)x + y + (1 - \sqrt{2}) = 0$$

e

$$\pi_3: (-\sqrt{2} - 1)x + y + (1 + \sqrt{2}) = 0.$$

Problema 2.6. Consideramos as rectas r e s de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que teñen por ecuacións na referencia natural

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \end{cases}$$

e sexan $P = (1, 0)$, $Q = (0, 0)$ e $Q' = (1, 1)$.

- Encontrar tódalas afinidades f que teñen P como punto fixo e tales que $f(r) = s$ e $f(Q) = Q'$.
- Encontrar o lugar xeométrico dos puntos fixos por estas afinidades.

Solución. Comezamos facendo a observación de que as dúas rectas intersecan no punto $P = (1, 0)$. Consideramos a referencia canónica $\{v_1, v_2; \mathcal{O}\}$.

- Tense que $f((1, 0)) = (1, 0)$ e $f((0, 0)) = (1, 1)$; en particular, $\tilde{f}(v_1) = (0, -1)$. Como o vector director de r é o $(0, 1)$ e o vector director de s é o $(1, 2)$, a condición de $f(r) = s$ quere dicir que $\tilde{f}((0, 1)) = \lambda(1, 2)$, para algún λ . Polo tanto, unha afinidade f coas condicións pedidas vén dada pola matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda & 1 \\ -1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- Se o 1 non é un valor propio da parte lineal, a afinidade ten exactamente un único punto fixo, que necesariamente é o punto P . O polinomio característico da parte lineal é $X^2 - 2\lambda X + \lambda$, polo que o 1 é valor propio se, e soamente se, $1 - 2\lambda + \lambda = 0$, isto é, se $\lambda = 1$. Entón, se $\lambda \neq 1$, o único punto fixo é P .

Se $\lambda = 1$, o subespazo de vectores propios de valor propio 1 é o $\langle(1, 1)\rangle$. Un punto (a, b) é fixo se, e soamente se

$$(b + 1, -a + 2b + 1) = (a, b).$$

Isto é equivalente a dicir que o punto (a, b) pertence á recta $x - y - 1 = 0$.

Neste caso, pódese observar tamén que unha recta $r: (a, b) + \langle(1, 1)\rangle$ é invariante por f se, e soamente se,

$$(b + 1, -a + 2b + 1) - (a, b) = (b + 1 - a, -a + b + 1) \in \langle(1, 1)\rangle,$$

que ocorre sempre. Polo tanto, calquera recta con vector director $(1, 1)$ é invariante.

Problema 2.7. Determinar o lugar xeométrico das imaxes dun punto dado P polas afinidades de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que teñen unha recta dada r de puntos fixos e unha recta tamén dada s , que se corta con r , invariante.

Solución. Fixamos un sistema de referencia $\{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$ do seguinte xeito. Situamos a orixe \mathcal{O} nun punto arbitrario da recta r , e consideramos que o seu vector director é v_1 , isto é, o punto $(1, 0, 0)$ tamén está en r . A continuación, facemos que v_2 sexa o vector director de r_2 . Observamos en particular que as rectas r e s están ambas contidas no plano $\pi: z = 0$. Finalmente, collemos como v_3 un vector calquera que non pertence ao plano π .

Polo tanto, se f é unha afinidade que cumpre as condicións do enunciado, cúmprese o seguinte:

- (i) $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, xa que \mathcal{O} é un punto fixo.
- (ii) $\tilde{f}(v_1) = v_1$, xa que v_1 é o vector director dunha recta de puntos fixos.
- (iii) $\tilde{f}(v_2) = \lambda v_2$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, xa que v_2 é o vector director dunha recta invariante.
- (iv) $\tilde{f}(v_3) = (\alpha, \beta, \gamma)$, xa que non hai ningunha restrición sobre v_3 .

Polo tanto, a matriz ampliada dunha f como a do enunciado é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Polo tanto, a imaxe de $P = (a, b, c)$ por f será

$$f(P) = (a + \alpha c, \lambda b + \beta c, \gamma c).$$

Se $c \neq 0$, entón a $f(P)$ pode tomar calquera valor (a', b', c') : é suficiente coller $a' = \frac{a' - a}{c}$, $\lambda = 0$, $\beta = \frac{b'}{c}$ e $\gamma = \frac{c'}{c}$. Neses casos, o lugar xeométrico é todo o espazo afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$. Se $c = 0$, pero $b \neq 0$, entón $f(P) = (a, \lambda b, 0)$; nese caso, a recta pasa por calquera punto $(a, b', 0)$, simplemente pondo $\lambda = b'/b$. Polo tanto, o lugar xeométrico é a recta

$$\begin{cases} x = a \\ z = 0, \end{cases}$$

isto é, a paralela a s que pasa por P . Se $b = c = 0$, o punto sempre é fixo por pertencer a r , polo que o lugar xeométrico é o propio punto P .

Problema 2.8. Determinar o lugar xeométrico das imaxes dun punto dado P polas afinidades de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que teñen unha recta dada r de puntos fixos e unha recta tamén dada s , que se cruza con r , invariante.

Solución. Fixamos un sistema de referencia $\{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$ do seguinte xeito. Situamos a orixe \mathcal{O} nun punto arbitrario da recta r , e consideramos que o seu vector director é v_1 , isto é, o punto $(1, 0, 0)$ tamén está en r . A continuación, consideramos un punto calquera de s e facemos que v_2 sexa o vector que une \mathcal{O} con ese punto; é dicir, asignámoslle coordenadas $(0, 1, 0)$. Finalmente, v_3 é o vector director de s , polo que o punto $(0, 1, 1)$ tamén está en s e un punto calquera ten compoñentes $(0, 1, t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Polo tanto, se f é unha afinidade que cumpre as condicións do enunciado, cúmprese o seguinte:

- (i) $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, xa que \mathcal{O} é un punto fixo.
- (ii) $\tilde{f}(v_1) = v_1$, xa que v_1 é o vector director dunha recta de puntos fixos.
- (iii) $\tilde{f}(v_3) = \lambda v_3$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, xa que v_3 é o vector director dunha recta invariante.
- (iv) $\tilde{f}(v_2) = (0, 1, \gamma)$, xa que $f((0, 1, 0)) = (0, 1, \gamma)$, para algún $\gamma \in \mathbb{R}$.

Polo tanto, a matriz ampliada dunha f como a do enunciado é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Polo tanto, a imaxe de $P = (a, b, c)$ por f será

$$f(P) = (a, b, \gamma b + \lambda c).$$

Se $b \neq 0$, entón a terceira coordenada pode tomar calquera valor c' , simplemente tomando $\lambda = 0$ e $\gamma = b^{-1}c'$; o mesmo serve se $c \neq 0$. Neses casos, o lugar xeométrico é a recta

$$\begin{cases} x = a \\ y = b, \end{cases}$$

isto é, a paralela a s que pasa por P . Se $b = c = 0$, o punto sempre é fixo por pertencer a r , polo que o lugar xeométrico é o propio punto P .

Familias de afinidades e clasificación.

Problema 2.9. Sexa $h(\mathcal{O}, \lambda)$ a homotecia de centro \mathcal{O} e razón λ nun espazo afín \mathbb{A} , con \mathcal{O} un punto calquera de \mathbb{A} e $\lambda \in K$, con $\lambda \neq 1$.

- (a) Sexa f unha afinidade invertible calquera. Calcular a composición $f \circ h(\mathcal{O}, \lambda) \circ f^{-1}$.
- (b) Calcular a composición $h(\mathcal{O}, \lambda) \circ h(\mathcal{O}', \lambda')$ e deducir que se a composición de dúas homotecias é unha homotecia, os seus centros están aliñados.
- (c) É un grupo o conxunto de tódalas homotecias?

Solución. (a) Sex A é a matriz correspondente á parte lineal de f e b a parte correspondente á translación, trátase de calcular

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{I} & \mathcal{O} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{I} & A\mathcal{O} + (1-\lambda)b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

(b) A composición é

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{I} & \mathcal{O} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda' \mathbb{I} & \mathcal{O}' \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \lambda' \mathbb{I} & \lambda \mathcal{O}' + \mathcal{O} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

Trátase dunha homotecia se, e soamente se, $\lambda \lambda' \neq 1$. Nese caso, o centro é $\lambda \mathcal{O}' + \mathcal{O}$, que é unha combinación de \mathcal{O} e \mathcal{O}' , polo que está na recta definida por eses dous puntos.

(c) Non é un grupo, xa que a composición pode ser unha translación. En cambio, o conxunto formado polas translacións e as homotecias si é un grupo.

Problema 2.10. Encontrar as afinidades (bixectivas) de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que deixan invariante un triángulo dado ABC e clasificalas.

Solución. A afinidade permuta os vértices do triángulo, polo que hai 6 opcións:

(a) $f(A) = A$, $f(B) = B$ e $f(C) = C$. Como a afinidade fixa tres puntos independentes, entón é a identidade.

(b) $f(A) = A$, $f(B) = C$ e $f(C) = B$. Considerando a referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}; A\}$, a matriz ampliada de f é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

A variedade de puntos fixos é a recta $x - y = 0$, e tódalas rectas paralelas a $x + y = 1$ son invariantes; é dicir, a afinidade é unha homoloxía xeral. Os casos nos que B (respectivamente C) é fixo e A e C (resp. A e B) se intercambian son análogos.

(c) $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(C) = A$. Considerando a referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}; A\}$, a matriz ampliada de f é

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Como o 1 non é valor propio, a afinidade ten un único punto fixo, que é o baricentro do triángulo xa que

$$f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{B+C+A}{3}.$$

A matriz da aplicación lineal non diagonaliza, polo que falamos de homotecia especial.

Problema 2.11. No plano afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ consideramos unha recta r e dous puntos $p, q \notin r$ de xeito que $q - p$ ten a mesma dirección que r .

(a) Clasificar tódalas afinidades f de xeito que r é f -invariante, $f(p) = q$ e $f(q) = p$.

(b) Para as afinidades anteriores, clasificar a afinidade $f|r$.

Solución. (a) Sexa t un punto calquera de r . Consideramos a referencia $\{\mathbf{pq}, \mathbf{pt}; p\}$. Polo tanto, a recta pq ten ecuación $y = 0$ e a recta r ten ecuación $y = 1$. Ambas

son invariantes por f . Tense que $f(\mathbf{pq}) = \mathbf{qp}$. Como $f(t) = (a, 1)$ e $f(\mathbf{pt}) = f(t) - q = (a, 1) - (1, 0) = (a - 1, 1)$. Polo tanto, a matriz ampliada de f é

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Un punto (x, y) é fixo se

$$(x, y) = (-x + (a - 1)y + 1, y),$$

isto é, se

$$2x + (1 - a)y = 1.$$

Como os valores propios son 1 e -1 , hai unha única recta de puntos fixos, que é a descrita pola ecuación anterior; tódalas rectas paralelas a r son invariantes.

- (b) Sexa $t = (0, 1)$ e $t' = (1, 1)$ e consideramos a referencia $\{\mathbf{tt}'; t\}$. Temos que $f(t) = (a, 1)$ e $f(t') = (a - 1, 1)$, polo que $f(\mathbf{tt}') = -\mathbf{tt}'$. Polo tanto, a ecuación da afinidade é $x' = -x + a$. Ten un único punto fixo, que é o $x = a/2$, e a afinidade restrinxida á recta é unha homotecia de centro $(a/2, 1)$ e razón -1 (unha simetría).

Problema 2.12. Sexa $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ a afinidade que cumpre as seguintes tres condicións:

- (i) restrinxida ao plano $x + 2y = 1$ é unha homotecia;
- (ii) $\tilde{f}(e_3) = 3e_3$;
- (iii) a recta $(1, 0, 3) + \langle(0, 1, 0)\rangle$ é de puntos fixos.

Responder as seguintes cuestións.

- (a) Achar a razón da homotecia e a matriz de \tilde{f} na base canónica.
- (b) Achar $f(0, 0, 0)$ e determinar o centro da homotecia.
- (c) Atopar as rectas invariantes por f .

Solución. (a) Sexa $\pi: x + 2y = 1$. O subespazo director é $F = \langle(-2, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$, e tense que $\tilde{f}|_F$ é un múltiplo da identidade, é dicir, $\tilde{f}|_F = \alpha \text{Id}$. Como $e_3 \in F$, entón $\tilde{f}(e_3) = \alpha \cdot e_3 = 3e_3$, polo que $\alpha = 3$, e esta é a razón da homotecia.

Xa sabemos que $\tilde{f}(0, 0, 1) = (0, 0, 3)$ e $\tilde{f}(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, xa que $(0, 1, 0)$ é o subespazo director dunha recta de puntos fixos. Sabemos tamén que $\tilde{f}(-2, 1, 0) = (-6, 3, 0)$, polo que

$$\tilde{f}(1, 0, 0) = -\frac{1}{2}\tilde{f}(-2, 1, 0) + \frac{1}{2}\tilde{f}(0, 1, 0) = (3, -1, 0).$$

Tense entón que a matriz é

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sabemos que

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= f(1, 0, 3) - \tilde{f}(1, 0, 0) - \tilde{f}(0, 0, 3) \\ &= (-2, 1, -6). \end{aligned}$$

O centro da homotecia é a intersección da recta de puntos fixos co plano. Un punto xenérico da recta escríbese como $(1, t, 3)$. Impomos agora que $1 + 2t = 1$, polo que $t = 0$; isto quere dicir que o centro da homotecia é o $(1, 0, 3)$.

(c) Sexa $v = (x, y, z)$ un vector propio de \tilde{f} e consideremos un punto arbitrario (a, b, c) . Para que o punto pertenza a unha recta invariante de vector director v , tense que cumprir que

$$f(a, b, c) - (a, b, c) = (2a - 2, -a + 1, 2c - 6) \in \langle v \rangle.$$

Imos distinguir dous casos. En primeiro lugar, se v ten valor propio 3, cúmprese que $x + 2y = 0$. Polo tanto, é suficiente con impoñer que $(a - 1, c - 3)$ sexa múltiplo de (x, z) , é dicir, que $za - xc = z - 3x$. Polo tanto, para cada vector v temos un plano no cal tódalas rectas de vector director v son invariantes; é o plano cuxo subespazo director está xerado por v e por $(0, 1, 0)$, e que pasa polo $(1, 0, 3)$, o centro da homotecia. En segundo lugar, se v ten valor propio 1, é un múltiplo de $(0, 1, 0)$, polo que se precisa que $a = c = 0$, pero b pode tomar calquera valor. Temos polo tanto a recta $(0, 0, 0) + \langle (0, 1, 0) \rangle$, que de feito é de puntos fixos.

Problema 2.13. Sexa $f: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ unha afinidade tal que a recta $x = 1, z = 0$ é invariante, e o plano $\pi: x + y + z = 3$ tamén é invariante.

(a) Dar unha referencia de \mathbb{A}^3 na que f teña ecuacións

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

(b) Supoñamos que a recta $r: x = 2, y + z = 1$ é fixa e que $f(3, 0, 0) = (0, 0, 3)$. Clasificar a afinidade do plano $f|_{\pi}: \pi \rightarrow \pi$.

(c) Se ademais $f(2, 0, 0) = (2, -1, 0)$, dar a matriz de f na referencia ordinaria.

Solución. (a) Para ter unha referencia $\{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$ como a pedida, é suficiente con que \mathcal{O} sexa un punto fixo, v_1 sexa o vector director dunha recta invariante e $\{v_2, v_3\}$ sexa base do subespazo director dun plano invariante. A intersección do plano e da recta, o punto $(1, 2, 0)$ é invariante, xa que a intersección de variedades invariantes tamén o é. Escollemos entón $\mathcal{O} = (1, 2, 0)$, $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$.

(b) Temos que o plano contén unha recta de puntos fixos e unha recta invariante que se cortan nun punto; iso quere dicir que calquera recta paralela á recta invariante tamén o será, xa que a dirección da recta imaxe será a mesma e todas elas conteñen un punto da recta de puntos fixos. Como $f|_{\pi}$ non é a identidade, temos que é unha homoloxía xeral.

(c) Para caracterizar f é suficiente con dar a imaxe de catro puntos afinmente independentes. Xa sabemos que $f(1, 2, 0) = (1, 2, 0)$, e agora temos tamén que $f(3, 0, 0) = (0, 0, 3)$. Para caracterizar a restrición de f ao plano, é suficiente

entón coller un punto sobre a recta r que non estea aliñado cos dous anteriores, por exemplo, o $(2, 0, 1)$, que cumpre $f(2, 0, 1) = (2, 0, 1)$. Finalmente, temos que $f(2, 0, 0) = (2, -1, 0)$:

$$\begin{aligned} f(1, 2, 0) &= (1, 2, 0) \\ f(3, 0, 0) &= (0, 0, 3) \\ f(2, 0, 1) &= (2, 0, 1) \\ f(2, 0, 0) &= (2, -1, 0). \end{aligned}$$

Isto permítenos calcular \tilde{f} considerando restas de puntos:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0, 0, 1) &= (0, 1, 1) \\ \tilde{f}(1, 0, 0) &= (-2, 1, 3) \\ \tilde{f}(-1, 2, 0) &= (-1, 3, 0). \end{aligned}$$

En particular,

$$\tilde{f}(0, 1, 0) = \frac{1}{2}\tilde{f}(1, 0, 0) + \frac{1}{2}\tilde{f}(-1, 2, 0) = (-3/2, 2, 3/2).$$

Finalmente, observamos que, chamado e_1 ao vector $(1, 0, 0)$, cúmprese que $(0, 0, 0) = (2, 0, 0) - 2e_1$, polo que

$$f(0, 0, 0) = f(2, 0, 0) - 2\tilde{f}(e_1) = (6, -3, -6).$$

Polo tanto, a afinidade buscada ten por matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3/2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 3/2 & 1 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Problema 2.14. Encontrar as ecuacións da afinidade de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que deixa invariante o plano $\pi: x + y = 1$, actúa sobre este plano como unha translación de vector $(0, 0, 1)$ e envía o punto $(1, 1, 0)$ á orixe.

Solución. As condicións do enunciado determinan completamente a imaxe de 4 puntos independentes: a de calquera do plano π e a do punto $(1, 1, 0)$. En particular,

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (1, 0, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (0, 1, 1) \\ f(1, 0, 1) &= (1, 0, 2) \\ f(1, 1, 0) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Isto permite determinar, considerando as diferenzas, as imaxes por \tilde{f} dun conxunto de tres vectores linealmente independentes:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(-1, 1, 0) &= (-1, 1, 0) \\ \tilde{f}(0, 0, 1) &= (0, 0, 1) \\ \tilde{f}(0, 1, 0) &= (-1, 0, -1). \end{aligned}$$

Polo tanto,

$$\tilde{f}(1, 0, 0) = \tilde{f}(0, 1, 0) - \tilde{f}(-1, 1, 0) = (-1, 0, -1) - (-1, 1, 0) = (0, -1, -1).$$

Finalmente, observamos que, chamado e_1 ao vector $(1, 0, 0)$, cúmprese que $(0, 0, 0) = (1, 0, 0) - e_1$, polo que

$$f(0, 0, 0) = f(1, 0, 0) - \tilde{f}(e_1) = (1, 1, 2).$$

Polo tanto, a afinidade buscada ten ecuacións

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \\ z' = -x - y + z + 2. \end{cases}$$

Problema 2.15. Encontrar as ecuacións na referencia ordinaria da homoloxía xeral de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que ten por eixe a recta $r: x + 2y - 3 = 0$, de razón $\alpha = -2$ e na dirección do vector $v = (1, 3)$.

Solución. A recta r ten vector director $(-2, 1)$, polo que este é un vector propio de valor propio 1; de xeito similar, o vector $(1, 3)$ é un vector propio de valor propio -2 . Polo tanto, podemos dar a matriz na referencia $\mathcal{R} = \{(-2, 1), (1, 3); (1, 1)\}$, xa que $(1, 1)$ é un punto do eixe e polo tanto fixo; neste caso, temos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Na referencia canónica, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1, 0) &= -\frac{3}{7}\tilde{f}(-2, 1) + \frac{1}{7}\tilde{f}(1, 3) = \left(\frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right) \\ \tilde{f}(0, 1) &= \frac{1}{7}\tilde{f}(-2, 1) + \frac{2}{7}\tilde{f}(1, 3) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{11}{7}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, temos que $(0, 0) = (1, 1) - e_1 - e_2$, polo que

$$f(0, 0) = f(1, 1) - \tilde{f}(e_1) - \tilde{f}(e_2) = \left(\frac{9}{7}, \frac{27}{7}\right).$$

Entón, a matriz na base canónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4/7 & -6/7 & 9/7 \\ -9/7 & -11/7 & 27/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Problema 2.16. Na familia de afinidades de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de ecuacións

$$\begin{cases} x' = ax + ay + b \\ y' = ax + 6y + b^2 \end{cases}$$

hai catro homoloxías de xeito que os seus eixos son os lados dun paralelogramo. Achar os vértices do paralelogramo.

Solución. Tense que a afinidade é unha homoloxía se, e soamente se, 1 é un valor propio de

$$\text{Char}(\tilde{f}; X) = X^2 - (6 + a)X + 6a - a^2.$$

Iso é equivalente a dicir que $1 - (6 + a) + 6a - a^2 = 0$, ou o que é o mesmo, $a^2 - 5a + 5 = 0$. Polo tanto, $a = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Por outro lado, para eses valores de a , tense que cumprir que o rango de $\tilde{f} - \text{Id}$ coincida co da matriz ampliada ao considerarmos tamén o vector de coeficientes. Se $b = 0$, iso é evidente. Senón, imos $\frac{a}{5} = -\frac{b}{b^2}$, polo que $b = -\frac{5}{a}$. Imos atopar en cada un dos casos os eixes da homoloxía.

- Para $a = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ e $b = -\frac{5}{a} = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}$, o vector propio asociado ao valor propio 1 é $\left(-\sqrt{5}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. Ese é o vector director do eixe, e para achar un punto calquera atopamos un punto invariante, por exemplo o $\left(0, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.
- Para $a = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ e $b = 0$, o vector propio asociado valor propio 1 é $\left(-\sqrt{5}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ e un punto fixo é o $(0, 0)$.
- Para $a = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ e $b = -\frac{5}{a} = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}$, o vector propio de valor propio 1 é $\left(\sqrt{5}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$. Ese é o vector director do eixe, e para achar un punto calquera atopamos un punto invariante, por exemplo o $\left(0, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.
- Para $a = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ e $b = 0$, o vector propio de valor propio 1 é $\left(\sqrt{5}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ e un punto fixo é o $(0, 0)$.

Podemos achar agora os 4 puntos de corte. Consideremos o segundo eixe, que ten por ecuación $y = -\frac{5 + \sqrt{5}}{10}x$. A ecuación do terceiro eixe é

$$y = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} + \frac{-5 + \sqrt{5}}{10}x,$$

polo que o punto de intersección é $P_1 = \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, -2 - \sqrt{5}\right)$. O punto de intersección co cuarto eixe é o $P_2 = (0, 0)$. O primeiro eixe ten por ecuación

$$y = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}x,$$

e o punto de intersección co terceiro eixe é $P_4 = (5, -4)$. O punto P_3 é a intersección do primeiro eixe co cuarto, que ten ecuación $y = \frac{-5 + \sqrt{5}}{10}x$. Polo tanto, $P_3 = \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}, -2 + \sqrt{5}\right)$.

Problema 2.17. No plano afín real $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ consideramos a afinidade que na referencia ordinaria ten por ecuacións

$$f(x, y) = (2x - y + 1, 3x - 2y + a),$$

onde a é un parámetro.

- (a) Clasificar f en función de a e atopar as rectas f -invariantes en cada caso.
- (b) Para $a = 3$, achar un sistema de referencia no que f teña unha expresión reducida.

- (c) Sexa g unha homoloxía xeral e τ_v unha translación de vector v . Dar condicións necesarias e suficientes para que $f = \tau_v \circ g$ sexa unha homoloxía xeral.

Solución. (a) A parte lineal de f ten por matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

que ten valores propios 1 e -1 . Para que haxa rectas invariantes, a parte lineal $(1, a)$ ten que ser linealmente dependente con $(1, 3)$, polo que $a = 3$. Se $a \neq 3$, entón f non ten puntos fixos. Para as rectas invariantes, sabemos que hai unha única recta invariante de vector director o vector propio de valor propio 1, que é $(1, 1)$. Para achar un punto de paso, impomos que

$$f(\alpha, \beta) - (\alpha, \beta) = (\alpha - \beta + 1, 3\alpha - 3\beta + a) \in \langle (1, 1) \rangle,$$

que implica que $4\alpha - 4\beta = 1 - a$. Esta é precisamente a ecuación da recta invariante, que ten pendente 1.

Se $a = 3$ trátase dunha homoloxía xeral de eixe $x - y = -1$ e de dirección $(1, 3)$, polo que calquera recta con vector director $(1, 3)$ é invariante.

- (b) Consideramos o sistema de referencia $\{(1, 1), (1, 3); (0, 1)\}$. Nese sistema de referencia, a matriz é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- (c) Na base na que a homoloxía admite a referencia reducida, temos que f se escribe como

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Tense que cumprir que (a, b) sexa múltiplo de $(0, \alpha - 1)$, polo que a condición necesaria e suficiente é que $a = 0$, isto é, que a translación sexa na mesma dirección que a homoloxía.

Problema 2.18. Sexa $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ unha afinidade tal que:

- (i) $(0, 0)$ é un punto fixo.
(ii) as rectas $r: y = 2x$ e $s: x + y = 1$ son invariantes por f .

Responder as seguintes preguntas.

- (a) Demostrar que r é unha recta de puntos fixos.
(b) Sabendo que $f(2, -1) = (1, 0)$, encontrar a matriz de f nunha referencia.
(c) Mantendo as hipóteses do apartado anterior, estudar as rectas invariantes por f .

Solución. (a) A intersección de r e s é o punto $(1/3, 2/3)$. Como o punto $(0, 0)$ tamén pertence á recta r , esta ten dous puntos fixos e polo tanto é unha recta de puntos fixos.

- (b) Temos que $f(1/3, 2/3) = (1/3, 2/3)$ e $f(2, -1) = (1, 0)$. Como a orixe O tamén é un punto fixo, se pomos $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$, podemos calcular as imaxes deses vectores a partir dos tres puntos que coñecemos. En concreto, na referencia $\{v_1, v_2; O\}$ a matriz é

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 3/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- (c) Sexa $s: p + \langle v \rangle$ unha recta arbitraria. Para que s sexa invariante, necesariamente v ten que ser un vector propio de \tilde{f} . Os valores propios de \tilde{f} son 1 e $2/5$. O subespazo de vectores propios asociado ao valor propio 1 é $\langle (1, 2) \rangle$, e o asociado ao valor propio $2/5$ é $\langle (1, -1) \rangle$.

Sexa $s: (a, b) + t(1, 2)$ unha recta calquera de vector director $(1, 2)$. Entón, s é invariante por f se, e soamente se, $f(a, b) - (a, b) \in \langle (1, 2) \rangle$. Neste caso,

$$f(a, b) - (a, b) = \left(-\frac{2a}{5} + \frac{b}{5}, \frac{2a}{5} - \frac{b}{5} \right),$$

polo que se ten que cumprir que

$$2 \cdot \left(-\frac{2a}{5} + \frac{b}{5} \right) = \frac{2a}{5} - \frac{b}{5}.$$

Isto é equivalente a $2a = b$; é dicir, a recta ten que ser $y = 2x$, que é a recta de puntos fixos do primeiro apartado.

Sexa agora $s: (a, b) + t(1, -1)$ unha recta calquera de vector director $(1, -1)$. Entón, r é invariante por f se, e soamente se, $f(a, b) - (a, b) \in \langle (1, -1) \rangle$. Neste caso,

$$f(a, b) - (a, b) = \left(-\frac{2a}{5} + \frac{b}{5}, \frac{2a}{5} - \frac{b}{5} \right),$$

que sempre é un múltiplo de $(1, -1)$. Polo tanto, calquera recta paralela a $x + y = 0$ é invariante por f .

Alternativamente, como unha recta en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ é un hiperplano, podemos achar directamente os vectores propios de \tilde{A}^t . Como os valores propios son 1 (dobre) e $2/5$, vemos que os subespazos propios correspondentes son $\langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ e $\langle (-2, 1, 0) \rangle$, respectivamente. Polo tanto, as rectas invariantes son $-2x + y = 0$ e calquera da forma $x + y + c = 0$, con $c \in \mathbb{R}$.

Problema 2.19. Sexa ABC un triángulo dun espazo afín calquera, P un punto da recta BC e M un punto da recta AP . As paralelas a CM por P e a AP por B córtanse no punto B' . As paralelas a BM por P e a AP por C córtanse nun punto C' . Sexan I , J e K os puntos medios de PM , BB' e CC' .

- (a) Demostrar que M , B' e C' están aliñados.
 (b) Demostrar que I , J e K están aliñados.

Solución. (a) Consideramos a homoloxía xeral de centro P , que fixa a recta BC , na que tódalas rectas paralelas a AP son invariantes e que envía M a A . Alternativamente, esta é a afinidade caracterizada por fixar a recta BC e enviar M a A . Como as afinidades conservan paralelismos, o problema é equivalente ao seguinte: *sexa B'' a intersección da paralela a AC por P e da paralela a AP por B , e sexa*

C'' a intersección da paralela a AB por P e da paralela a AP por C . Demostrar que B'' , A e C'' están aliñados. Este problema resólvese empregando coordenadas. Fixamos como referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}; A\}$ e pomos $P = (a, 1-a)$. Entón, temos que $B'' = \left(a, \frac{(a-1)(1-a)}{a}\right)$ e $C'' = \left(\frac{a^2}{a-1}, 1-a\right)$, e un cálculo inmediato amosa que os tres puntos están aliñados.

- (b) Consideremos a homoloxía de eixe BC , na dirección AP e de razón $1/2$. Entón, os puntos M , B' e C' van a I , J e K , e como as homoloxías manteñen as colineacións, tense automaticamente o resultado.

Problema 2.20. Dado un triángulo ABC dun espazo afín real, encontrar tres puntos A' , B' , C' de xeito que B' é o punto medio de AC' , C' é o punto medio de BA' e A' é o punto medio de CB' .

Solución. Consideramos a composición das seguintes tres homotecias: a homotecia de centro A e razón 2 ; a homotecia de centro B e razón 2 ; e a homotecia de centro C e razón 2 . A primeira envía B' a C' ; a segunda envía C' a A' ; e a terceira envía A' a B' . Polo tanto, a composición das tres ten a B' como punto fixo. Se consideramos o sistema de referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}; A\}$, temos que a composición das tres homotecias se escribe en forma matricial como

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A condición de que B' sexa un punto fixo quere dicir que se chamamos (x_2, y_2) ás súas coordenadas, entón

$$x_2 = 8x_2 - 2, \quad y_2 = 8y_2 - 1,$$

polo que $B' = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$. De xeito similar, considerando a composición das homotecias na orde correspondente, obtemos que $A' = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right)$ e $C' = \left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

Problema 2.21. Consideramos as variedades lineais afíns de \mathbb{A}^3 dadas por

$$r: (1, 0, 1) + \langle(0, 1, 1)\rangle, \quad \pi: x - y + z = 1.$$

Sexa $f: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ a simetría con respecto ao plano π na dirección $G = \langle(1, 1, 1)\rangle$ (tamén chamada simetría especular).

- (a) Dar unha referencia de \mathbb{A}^3 e determinar a matriz de f nesta referencia.
 (b) Calcular a imaxe da recta r pola afinidade f .

Solución. (a) Calquera vector contido no plano π é un vector propio de valor propio 1 ; collemos por exemplo $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$. A dirección da simetría $v_3 = (1, 1, 1)$ é un vector propio de valor propio -1 . Finalmente, calquera punto do plano π é un punto fixo; tomamos $\mathcal{O} = (1, 0, 0)$. Deste xeito, na referencia $\{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$, a matriz é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- (b) O vector director $(0, 1, 1)$ pertence ao subespazo director de π , polo que é fixo pola proxección. Chega entón con calcular a imaxe dun punto arbitrario da recta. Sexa $P = (1, 0, 1)$. O punto de corte co plano π , é a intersección de $(1, 0, 1) + \langle(1, 1, 1)\rangle$ con π , isto é, o $(0, -1, 0)$. Temos que $f(P) = 2P' - P = (-1, -2, -1)$. Polo tanto, $f(r) = (-1, -2, -1) + \langle(0, 1, 1)\rangle$.

Problema 2.22. Sexa a un número real. Consideramos a afinidade $f_a: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que, nun certo sistema de referencia, vén dada polas ecuacións seguintes:

$$\begin{aligned}x^* &= 7x - (10a + 1)y + (7 - 5a)z + 3 \\y^* &= 2x + (2 - 4a)y + (3 - 2a)z + 1 \\z^* &= -6x + (8a + 5)y + (4a - 4)z - 3.\end{aligned}$$

- (a) Atopar o conxunto de puntos fixos de f_a para cada valor de a .
- (b) Se $a = 2$, estudar as variedades lineais afíns invariantes por f_2 (puntos, rectas e planos)
- (c) Demostrar que se $a \neq 2$, entre os planos invariantes por f_a hai dous que conteñen unha recta de puntos fixos. Probar que a restrición de f_a a un destes planos é unha homoloxía especial e a restrición ao outro plano é unha homoloxía xeral.

Solución. (a) Para achar os puntos fixos, temos que resolver o sistema $(x', y', z') = (x, y, z)$. Operando, iso corresponde con

$$\begin{pmatrix} 6 & -10a - 1 & 7 - 5a \\ 2 & 1 - 4a & 3 - 2a \\ -6 & 8a + 5 & 4a - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Chamemos A á matriz do sistema. Se c_1, c_2 e c_3 denotan as columnas da matriz, entón $\frac{5}{2}c_1 + c_2 - 2c_3 = 0$, independentemente do valor de a . Polo tanto, o rango da matriz é como moito 2. Para que o rango sexa 1, cada columna ten que ser linealmente dependente coas outras, e unha comprobación rutineira amosa que iso pasa se, e soamente se, $a = 2$. Polo tanto, cómpre distinguir dous casos:

- Se $a = 2$, temos que os puntos fixos correspóndense con $(-1/2, 0, 0) + \ker A$, xa que $(-1/2, 0, 0)$ é unha solución particular. Operando, a variedade afín de puntos fixos correspóndese con

$$2x - 7y - z + 1 = 0.$$

- Se $a \neq 2$, os puntos fixos correspóndense tamén con $(-1/2, 0, 0) + \ker A$, pero neste caso, $\ker A = \langle(5/2, 1, -2)\rangle$, independentemente do valor de a .

- (b) Os puntos invariantes xa se atoparon no apartado anterior. Sexa

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -21 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & -1 & 1 \\ -6 & 21 & 4 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

a matriz da afinidade e M a matriz correspondente á parte lineal. Cúmrese que $\text{Char}(M; X) = -(X - 1)^2(X - 3)$, polo que os valores propios son 3 (simple) e 1 (dobre).

O subespazo propio correspondente ao valor propio 3 é $\langle(3, 1, -3)\rangle$, polo que para ter rectas invariantes hai que impor que $f(p) - p \in \langle(3, 1, -3)\rangle$. Isto pode escribirse como

$$\langle 6x - 21y - 3z + 3, 2x - 7y - z + 1, -6x + 21y + 3z - 3 \rangle \in \langle(3, 1, -3)\rangle;$$

a condición sempre se cumpre, xa que a primeira coordenada é o triplo da segunda, e a primeira e a terceira son iguais cambiando o signo.

O subespazo propio correspondente ao valor propio 1 é $F: 2x - 7y - z = 0$, polo que consideramos un vector $v = (x, y, z)$ con $v \in F$. Impoñemos agora que

$$\langle 6a - 21b - 3c + 3, 2a - 7b - c + 1, -6a + 21b + 3c - 3 \rangle \in \langle v \rangle;$$

como $v \in F$, tense que cumprir que

$$2(6a - 21b - 3c + 3) - 7(2a - 7b - c + 1) - (-6a + 21b + 3c - 3) = 4a - 14b - 2c + 2 = 0.$$

É dicir, unha condición necesaria para que un punto (a, b, c) pertenza a unha recta de vector director v é que estea contido no plano de puntos fixos. Esta condición é á súa vez suficiente, xa que como o vector director da recta pertence ao subespazo director do plano, a recta estará totalmente contida no plano e polo tanto será de puntos fixos.

Polo tanto, temos un plano de puntos fixos e tódalas rectas paralelas a unha dirección non contida no plano son invariantes; é o que se coñece como homoloxía xeral.

Por último, para os planos invariantes calculamos os vectores propios de \tilde{M}^t . Os valores propios asociados son 1 e 3; o 3 é simple e o vector propio asociado dá o plano $2x - 7y - z + 1 = 0$, que é o plano de puntos fixos. O subespazo propio asociado é $G = \langle(0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (-1, 3, 0, 0)\rangle$. Polo tanto, os planos invariantes son todos os da forma

$$(-b + c)x + 3by + cz + d = 0,$$

con $(b, c) \neq (0, 0)$. É dicir, son tódolos planos que conteñen o vector propio de valor propio 3.

- (c) Para achar os planos invariantes, temos que calcular os vectores propios da matriz trasposta da afinidade, que é

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 & 0 \\ -10a - 1 & 2 - 4a & 8a + 5 & 0 \\ 7 - 5a & 3 - 2a & 4a - 4 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os valores propios son 3 (simple) e 1 (triplo).

O vector propio asociado a 3 é o $\langle 2, -7, -1, 1 \rangle$, que se corresponde co plano

$$\pi: 2x - 7y - z + 1 = 0.$$

Este plano pódese escribir como $\pi: (-1/2, 0, 0) + \langle(5/2, 1, -2), (7, 2, 0)\rangle$, de xeito que a forma reducida é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

temos polo tanto unha homoloxía especial.

O espazo de vectores propios de valor propio 1 é o $\langle(2, -3, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$, de xeito que os planos invariantes son da forma

$$\pi_d: 2x - 3y + z + d = 0;$$

convén observar que consideramos tódalas combinacións lineais dos dous vectores nos que o coeficiente de $(2, -3, 1, 0)$ é non nulo. Se fixamos por exemplo $d = 1$, temos o plano $2x - 3y + z + 1 = 0$, que contén o punto fixo $(-1, 2, 0)$ e ten no seu subespazo director un vector propio de valor propio 1 e outro de valor propio 3, polo que a forma reducida é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

temos polo tanto unha homoloxía xeral.

En calquera caso, non é preciso atopar tódolos planos invariantes como fixemos aquí; tería sido suficiente con observar que a restrición a un plano da forma $p + \langle v_1, v_2 \rangle$, onde p é punto fixo, v_1 é vector propio de valor propio 1 e v_2 tamén é vector propio de valor propio distinto de 1 é unha homoloxía xeral; e a restrición a un plano da forma $p + \langle v_1, v_2 \rangle$, onde p é punto fixo, v_1 é vector propio de valor propio 1 e v_2 é vector propio xeralizado de xeito que $f(v_2) = v_1 + v_2$ é unha homoloxía especial.

Problema 2.23. Consideramos a afinidade de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y + 2z + 1, 2x + 3y + 2z, 2x + 2y + 3z).$$

- (a) Atopar as rectas invariantes por f .
- (b) Atopar os planos invariantes por f .
- (c) Consideramos os planos

$$\pi_1: x + y + z + \frac{1}{6} = 0, \quad \pi_2: y - z = 0.$$

Usando que π_1 e π_2 son invariantes por f , clasificar as afinidades $f|_{\pi_1}$ e $f|_{\pi_2}$.

Solución. (a) A matriz da afinidade é

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

O polinomio característico da parte lineal é $-(X-1)^2(X-7)$. Os vectores propios asociados ao valor propio 1 son os da forma (x, y, z) , con $x + y + z = 0$. Para termos unha recta invariante, necesitamos tamén que un punto dela, $p = (a, b, c)$, cumpra que $f(p) - p$ pertenza ao subespazo director. Se $v = (x, y, z)$ é un vector propio, entón

$$f(p) - p = (2a + 2b + 2c + 1, 2a + 2b + 2c, 2a + 2b + 2c) \in \langle(x, y, z)\rangle,$$

polo que, en particular, a segunda coordenada coincide coa terceira, e v ten que ser un múltiplo de $(-2, 1, 1)$. Como a suma das tres compoñentes é cero, unha condición necesaria é $6(a + b + c) + 1 = 0$; porén, tamén é suficiente, xa que, de ser ese o caso, $f(p) - p = (2/3, -1/3, -1/3)$. É dicir, as rectas invariantes serán todas aquelas contidas no plano $x + y + z + \frac{1}{6} = 0$ con vector director $(-2, 1, 1)$.

Como o subespazo propio de valor propio 7 está xerado polo $(1, 1, 1)$, a condición neste caso é que un punto (a, b, c) cumpra que

$$f(p) - p = (2a + 2b + 2c + 1, 2a + 2b + 2c, 2a + 2b + 2c) \in \langle (1, 1, 1) \rangle,$$

que non é posible xa que a primeira compoñente nunca pode ser igual ás outras dúas.

- (b) Os planos invariantes son os da forma $Ax + By + Cz + D = 0$, con (A, B, C, D) un vector propio de A^t distinto de $(0, 0, 0, D)$. Os valores propios de A^t son 1 (triple) e 7. Do vector propio correspondente ao valor propio 7 obtense o plano

$$x + y + z + \frac{1}{6} = 0.$$

Os vectores propios correspondentes ao valor propio 1 son os da forma $(0, \lambda, -\lambda, \mu)$, polo que se corresponden cos planos

$$\lambda(y - z) + \mu = 0,$$

onde λ ten que ser distinto de 0, xa que $\mu = 0$ non se considera solución. Dividindo por λ , quedánnos tódolos planos da forma

$$y - z + d = 0.$$

- (c) A restrición de f a π_1 é unha translación de vector $(2/3, -1/3, -1/3)$. Isto séguese de observar que, no plano π_1 ,

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z + 1 &= x + \frac{2}{3} \\ 2x + 3y + 2z &= y - \frac{1}{3} \\ 2x + 2y + 3z &= z - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A restrición de f a π_2 é unha homoloxía xeral seguida dunha translación. Sexa $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $P = (0, 0, 0)$. Entón,

$$\tilde{f}(v_1) = 3v_1 + 2v_2, \quad \tilde{f}(v_2) = 4v_1 + 5v_2, \quad f(P) = P + v_1.$$

Polo tanto, a matriz de $f|_{\pi_2}$ é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

É inmediato comprobar que non ten puntos fixos, e os valores propios da parte lineal son 1 e 7. Trátase polo tanto dunha homoloxía xeral seguida dunha translación, na que a única recta invariante é $6x + 12y + 1 = 0$.

A afinidade descrita neste problema é unha homoloxía xeral seguida dunha translación nunha dirección do plano. Unha homoloxía xeral é unha afinidade que ten un plano de puntos fixos e na que tódalas rectas cun vector director non contido no plano son invariantes. A forma reducida é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

con $\alpha \neq 1$. Deste xeito, non hai puntos fixos e as únicas rectas invariantes son as contidas no plano de puntos fixos pola homoloxía e que teñen a dirección da translación. Finalmente, os planos invariantes son, por un lado, o correspondente ao plano de puntos fixos da homoloxía, e logo todos que conteñen a dirección das rectas invariantes pola homoloxía e o vector director da translación; polo tanto, isto dá lugar a unha familia de planos paralelos, que son todos os da forma $y - z = d$.

Proxectividades.

Problema 2.24. En $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ consideramos a recta $L: 2x - z = 0$ e a proxectividade $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ que ten por matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular a imaxe da recta L por f .

Solución. Os puntos $[0 : 1 : 0]$ e $[1 : 0 : 2]$ pertencen á recta. As súas imaxes pola proxectividade son $[-2 : 1 : -1]$ e $[1 : 6 : 0]$. A ecuación da recta que pasa por eses dous puntos é

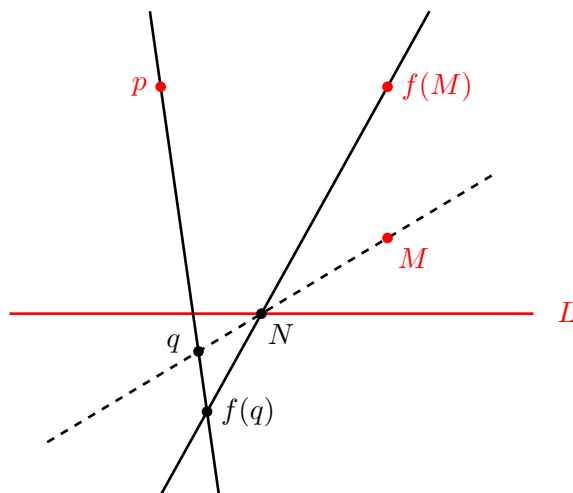
$$0 = \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ y & 1 & 6 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6x - y - 13z.$$

Problema 2.25. Sexa $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ unha homografía do plano proxectivo, con $f = [\varphi]$. Supoñamos que φ ten un valor propio dobre e que é diagonalizable. Demostrar que f ten un punto fixo p e unha recta de puntos fixos L , con $p \notin L$. Supoñamos que se coñece a imaxe dun punto $M \notin L$ e $M \neq p$. É posible caracterizar a imaxe dun punto q calquera?

Solución. Consideramos dous puntos arbitrarios da recta que non pertencen á recta $p \vee M$; chamémoslles A e B . Temos entón que $\{A, B, p; M\}$ é unha referencia proxectiva, e sabemos que existe unha única proxectividade que envía a referencia a uns certos valores. Se $q \notin p \vee f(M)$, procedemos do seguinte xeito:

- A recta $p \vee q$ é invariante, xa que contén dous puntos fixos, p e o punto de corte de $p \vee q$ con L .
- Sexa $N = L \cap (q \vee M)$. A imaxe da recta $q \vee N$ é a recta $N \vee f(M)$, xa que N é fixo e $f(M)$ é a imaxe de M .

Polo tanto, $f(q) = (p \vee q) \cap (N \vee f(M))$, como se ilustra no seguinte debuxo.



Se $q \in p \vee f(M)$, entón collemos outro punto fóra da recta para desempeñar o papel de M , xa que como a proxección é bixectiva, sempre haberá puntos que teñan a imaxe fóra da recta $p \vee q$.

Problema 2.26. Consideramos un plano proxección \mathbb{P}^2 .

- Atopar as ecuacións da homografía de \mathbb{P}^2 que deixa fixos os puntos $[(1, 2, 0)]$, $[(1, -1, \sqrt{3})]$ e $[(1, -1, -\sqrt{3})]$ e que envía $[(1, 0, 0)]$ a $[(0, 1, 0)]$.
- Atopar as ecuacións da homografía de \mathbb{P}^2 que deixa fixo o punto $[(1, 0, -1)]$, $x + y + 2z = 0$ é unha recta de puntos fixos e que transforma $[(1, -1, 1)]$ no punto $[(-5, 1, 3)]$.
- Encontrar as ecuacións da composición das dúas homografías anteriores.

Solución. (a) Consideramos a referencia proxección $\mathcal{R} = \{[1 : 2 : 0], [1 : -1 : \sqrt{3}], [1 : -1 : -\sqrt{3}]; [1 : 0 : 0]\}$. Para atopar unha base adaptada, resolvemos

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(1, -1, \sqrt{3}) + \gamma(1, -1, -\sqrt{3}) = (1, 0, 0),$$

e temos que $(\alpha, \beta, \gamma) = (1/3, 1/3, 1/3)$. Unha base adaptada é $\mathcal{B}_u = \{u_1, u_2, u_3\}$, con $u_1 = (1/3, 2/3, 0)$, $u_2 = (1/3, -1/3, 1/\sqrt{3})$ e $u_3 = (1/3, -1/3, -1/\sqrt{3})$. Tense que, para $i = 1, 2, 3$, $f(u_i) = \lambda_i u_i$, e para achar os λ_i , pomos

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = f(u_1 + u_2 + u_3) = (0, 1, 0).$$

Iso quere dicir que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1/2$ e $\lambda_3 = -1/2$. Polo tanto, nesta referencia a matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

que se corresponde cunha homoloxía xeral.

- Consideramos a referencia proxección $\mathcal{R} = \{[1 : 0 : -1], [1 : -1 : 0], [2 : 0 : -1]; [1 : -1 : 1]\}$. Para atopar unha base adaptada, resolvemos

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(2, 0, -1) = (1, -1, 1),$$

e temos que $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 1, 1)$. Polo tanto, unha base adaptada é $\mathcal{B}_u = \{u_1, u_2, u_3\}$, con $u_1 = (-2, 0, 2)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ e $u_3 = (2, 0, -1)$. Tense que, para $i = 1, 2, 3$, $f(u_i) = \lambda_i u_i$, e para achar os λ_i , pomos

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = f(u_1 + u_2 + u_3) = (-5, 1, 3).$$

Iso quere dicir que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$. Polo tanto, nesta referencia a matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que se corresponde cunha homoloxía xeral.

- (c) Sexa f a proxectividade do primeiro apartado; correspóndese cunha aplicación lineal φ tal que

$$\varphi(1, 2, 0) = (1, 2, 0), \quad \varphi(2, -2, 0) = (-1, 1, 0), \quad \varphi(0, 0, 1) = (0, 0, -1/2),$$

onde empregamos que calquera vector do plano $x + y = 0$ é un vector propio de valor propio $-1/2$. Polo tanto, $\varphi(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ e $\varphi(0, 1, 0) = (1/2, 1/2, 0)$. De xeito análogo, se g é a proxectividade do segundo apartado, correspóndese cunha aplicación lineal g de xeito que

$$\psi(-1, 0, 1) = (-1, 0, 1), \quad \psi(1, -1, 0) = (-1, 1, 0), \quad \psi(2, 0, -1) = (-2, 0, 1).$$

Logo, $\psi(1, 0, 0) = (-3, 0, 2)$, $\psi(0, 0, 1) = (-4, 0, 3)$ e $\psi(0, 1, 0) = (-2, -1, -2)$. Polo tanto, para facer a composición das dúas proxectividades chega con facer

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5/2 & 2 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ -2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.27. Atopar os puntos fixos e as rectas invariantes das homografías de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dadas polas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. O polinomio característico da primeira matriz é $\text{Char}(A; X) = -(X + 1)^3$. Iso quere dicir que -1 é un valor propio de multiplicidade alxébrica 3; como $\ker(A + \mathbb{I})$ ten dimensión 1, e a forma de Jordan consta dun bloque de tamaño 3. Para atopar un xerador, collemos un vector v_3 que non estea no núcleo de $\ker(A + \mathbb{I})^2$, por exemplo $v_3 = (1, 0, 0)$. Logo definimos $v_2 = (A + \mathbb{I})v_3 = (3, 5, -1)$ e $v_1 = (A + \mathbb{I})v_2 = (2, 2, -2)$. Na base $\{v_1, v_2, v_3\}$, a matriz de Jordan ten a forma

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta proxectividade ten como único punto fixo $p = [v_1]$, e como única recta invariante $L = [v_1] \vee [v_2]$.

O polinomio característico da segunda matriz é $\text{Char}(B; X) = -(X-1)^3$. Como $\ker(B - \mathbb{I}) = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$, temos que nunha base de Jordan $\{v_1, v_2, v_3\}$, a forma reducida corresponde a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Collemos $v_2 = (1, 0, 0)$, de xeito que non estea en $\ker(B - \mathbb{I})$, e logo definimos $v_1 = (B - \mathbb{I})v_2 = (1, 1, -1)$ e v_3 de xeito que $\{v_1, v_3\}$ sexa base de $\ker(B - \mathbb{I})$, por exemplo, $v_3 = (0, 1, 0)$. Entón, os puntos fixos son todos os da recta $L = [v_1] \vee [v_3]$, mentres que unha recta é invariante se, e soamente se, pasa por $[v_1]$; trátase dunha homoloxía especial.

Problema 2.28. Atopar os puntos fixos, as rectas invariantes e os planos invariantes da proxectividade de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ dada pola matriz

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Tense que $\text{Char}(M; X) = (X - 4)^4$. Tense que

$$\ker(M - 4\mathbb{I}) = \langle (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, -2) \rangle,$$

mentres que o núcleo de $\ker(M - 4\mathbb{I})^2$ ten dimensión 3 e está xerado polos dous vectores anteriores e o $(1, 0, 0, 0)$. Polo tanto, a forma de Jordan é

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Unha base de Jordan vén dada por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, con $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-2, 2, 0, 4)$, $v_1 = (0, -2, 2, 0)$ e $v_4 = (0, 1, 0, -2)$.

- Os puntos fixos veñen dados por todos os da recta $L = [v_1] \vee [v_4]$.
- As rectas invariantes correspóndense cos subespazos vectoriais invariantes de dimensión 2. Eses son os da forma $\langle v_1, av_2 + bv_4 \rangle$; para comprobar iso, podemos usar a forma de Jordan da restrición de φ ao subespazo F . En efecto, se $\varphi|_F$ diagonaliza, é o subespazo $\langle v_1, v_4 \rangle$; senón, hai un xerador da forma $w = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$, de xeito que $F = \langle w, (\varphi - 4\text{Id})w \rangle$, con $(\varphi - 4\text{Id})^2 w = 0$. En particular, da última condición temos que $c = 0$, polo que $F = \langle w, bv_1 \rangle$, polo que $b \neq 0$. Temos entón $F = \langle v_1, v_2 + dv_4 \rangle$. Precisamente o caso $b = 0$ é o correspondente ao caso diagonal. Isto quere dicir que tódalas rectas invariantes están contidas no plano $[\langle v_1, v_2, v_4 \rangle]$ e pasan polo punto $[v_1]$.
- De xeito análogo que no apartado anterior, temos que os subespazos invariantes de dimensión 3 son os da forma $\langle v_1, v_2, av_3 + bv_4 \rangle$. Polo tanto, os planos invariantes son todos os que conteñen a recta $[v_1] \vee [v_2]$.

Problema 2.29. Sexa $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ unha homografía dunha recta proxectiva \mathbb{P}^1 . Demostrar que f queda determinada por unha ecuación da forma $ax_0x_1 + bx_0y_1 + cx_1y_0 + dx_1y_1 = 0$, onde $p = [(x_0, x_1)]_{\mathcal{R}}$ e $f(p) = [(y_0, y_1)]_{\mathcal{R}}$, con $ad - bc \neq 0$. Demostrar que en coordenadas absolutas a expresión de f é

$$axy + bx + cy + d = 0,$$

onde $x = x_0/x_1$ e $y = y_0/y_1$.

Solución. Unha vez fixada unha referencia proxectiva, f queda determinada por unha matriz da forma

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

En particular, a imaxe dun punto $[x_1 : x_2]$ é $[\alpha x_1 + \beta x_2 : \gamma x_1 + \delta x_2]$. En coordenadas absolutas, pondo $x = x_1/x_2$ temos que $y = f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, de onde se ten que

$$\gamma xy - \alpha x + \delta y - \beta = 0,$$

de onde se segue o resultado do enunciado escribindo $a = \gamma$, $b = -\alpha$, $c = \delta$ e $d = -\beta$.

Problema 2.30. Sexa $f: \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_K^n$ unha homografía. Dise que f é unha *involución* se $f^2 = \text{Id}$. Encontrar tódalas homografías involutivas de \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^3 cando $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$

Solución. Se a matriz da proxectividade admite forma de Jordan e non diagonaliza, entón nunca podemos ter unha involución. O motivo é que ao facer o cadrado, a entrada situada por riba da diagonal nun bloque de Jordan de valor propio λ será precisamente λ , que nunca pode ser igual 0. Teremos entón que, se normalizamos de xeito que o primeiro valor propio sexa 1, os únicos valores propios son ± 1 , polo que, segundo a dimensión, temos as seguintes opcións:

- No caso de \mathbb{P}_K^2 , a proxectividade ten que ser ou ben a identidade ou ben diagonalizar con valores propios $(\lambda, \lambda, -\lambda)$, que se corresponde a $(1, 1, -1)$. Polo tanto, sérvenos calquera matriz que diagonalice e que teña por polinomio característico $(X - \lambda)^2(X + \lambda)$.
- No caso de \mathbb{P}_K^3 , a proxectividade ten que ser ou ben a identidade ou ben diagonalizar con valores propios $(\lambda, \lambda, \lambda, -\lambda)$, que se corresponde a $(1, 1, 1, -1)$; ou $(\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda)$, que se corresponde a $(1, 1, -1, -1)$. Polo tanto, sérvenos calquera matriz que diagonalice e que teña por polinomio característico $(X - \lambda)^3(X + \lambda)$ ou $(X - \lambda)^2(X + \lambda)^2 = (X^2 - \lambda^2)^2$.

En particular, no caso de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ pode suceder que os valores propios non sexan reais; nese caso, tense que cumprir que λ e $-\lambda$ sexan complexos conxugados e que teñan a mesma multiplicidade alxébrica, é dicir, as raíces do polinomio característico teñen que ser αi e $-\alpha i$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, e ambas con multiplicidade 2.

Problema 2.31. Estudar as homografías de \mathbb{P}_K^2 que cumpren $f^4 = \text{Id}$, nos casos nos que $K = \mathbb{C}$ e $K = \mathbb{R}$.

Solución. En primeiro lugar, observamos que a forma de Jordan (sobre os complexos) da matriz ten que ser diagonal, xa que

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

Polo tanto, temos que a matriz ten que ter valores propios que cumpran $\lambda_1^4 = \lambda_2^4 = \lambda_3^4$. Normalizando, podemos supor que $\lambda_1 = 1$.

- No caso $K = \mathbb{C}$, sérvenos calquera matriz que diagonalice cos outros valores propios iguais a $\{1, -1, i, -i\}$ (posiblemente repetidos).
- No caso $K = \mathbb{R}$, sérvenos por un lado calquera matriz cos outros valores propios $\{1, -1\}$ (posiblemente repetidos), que xa cumprirá $f^2 = \text{Id}$; ou unha matriz con valores propios $i, -i$ e logo ± 1 ; é dicir, calquera matriz con polinomio característico $(X^2 + \lambda^2)(X \pm \lambda)$.

Problema 2.32. Sexa $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ unha homografía do plano proxectivo real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Supoñamos que $f([x, y, z]) = [(x, y + 2z, z)]$.

- (a) Atopar os puntos fixos e as rectas invariantes.
- (b) Para cada recta invariante, estudar a afinidade que se obtén ao restrinxir a homografía ao espazo proxectivo menos a recta invariante.

Solución. Comezamos considerando unha matriz M de xeito que $[\varphi]$ estea representado por $[M]$. Neste caso,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinomio característico é $\text{Char}(M; X) = -(X - 1)^3$ e tense que $\dim \ker(M - \mathbb{I}) = 2$, polo que a matriz canónica de Jordan será

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Unha base de Jordan é da forma $\{v_1, v_2, v_3\}$, onde podemos coller como v_2 calquera vector que non estea no núcleo de $M - \mathbb{I}$, por exemplo, $v_2 = (0, 0, 1)$; neste caso, $v_1 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$.

- (a) Os puntos fixos correspóndense cos vectores propios, isto é, co núcleo de $\ker(M - \mathbb{I})$; un vector propio é unha combinación lineal $av_1 + bv_3$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, polo que hai unha recta de puntos fixos, $L = [v_1] \vee [v_3]$. As rectas invariantes correspóndense cos subespazos vectoriais invariantes de dimensión 2, que xa vimos que son todos os da forma $\langle v_1, av_2 + bv_3 \rangle$, con $(a, b) \neq (0, 0)$. Polo tanto, unha recta é invariante se, e soamente se, pasa polo punto $[v_1]$.
- (b) Hai dúas opcións. Unha é considerar que a recta do infinito é a recta de puntos fixos $L = [v_1] \vee [v_3]$. A súa ecuación é $z = 0$. Para interpretar a afinidade obtida, hai dúas opcións. A primeira pasa por observar que é unha afinidade sen puntos fixos, na que as rectas invariantes son todas aquelas que pasan por $[v_1]$, isto é, unha familia de rectas paralelas. Isto correspóndese cunha translación. Alternativamente, en termos das ecuacións, pomos $z = 1$ para a restrición ao espazo afín e temos $f([x : y : 1]) = [x : y + 2 : 1]$, polo que vemos directamente que é unha translación de vector $(0, 2)$.

Supoñamos agora que sacamos calquera outra das rectas invariantes. Entón, a afinidade resultante segue a ter unha recta de puntos fixos, que se corresponde

coa recta L (isto é, $z = 0$), e logo todas aquelas que pasan por $[v_1]$ son invariantes; como v_1 está na recta do infinito, isto equivale a dicir a que as rectas paralelas a L son invariantes. Isto correspóndese a unha homoloxía especial de eixe L e coa dirección dada por v_1 .

Problema 2.33. Sexa $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ unha homografía do plano proxectivo real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Supoñamos que

$$f([x, y, z]) = [(4x - 4z, -x + 2y + 2z, x)].$$

- Clasificala e atopar unha recta que se poida coller como recta do infinito.
- Estudar a afinidade correspondente e atopar as súas ecuacións nun sistema de referencia afín.

Solución. Comezamos considerando unha matriz M de xeito que $[\varphi]$ estea representado por $[M]$. Neste caso,

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O polinomio característico é $\text{Char}(M; X) = -(X - 2)^3$ e tense que $\dim \ker(M - 2\mathbb{I}) = 2$, polo que a matriz canónica de Jordan será

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Unha base de Jordan é da forma $\{v_1, v_2, v_3\}$, onde podemos coller como v_2 calquera vector que non estea no núcleo de $M - 2\mathbb{I}$, por exemplo, $v_2 = (1, 0, 0)$; neste caso, $v_1 = (-2, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 0)$.

- Trátase dunha homoloxía especial. Como recta do infinito pódese considerar a recta de puntos fixos $L = [v_1] \vee [v_3]$ ou calquera das rectas invariantes, isto é, calquera recta que pase por $[v_3]$. Neste caso imos considerar a recta de puntos fixos L . A súa ecuación é $x - 2z = 0$.
- Procedemos do xeito habitual. Para iso, consideramos tres puntos non aliñados p_1, p_2 e p_3 fóra da recta $x - 2z = 0$. Por exemplo, collemos $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 0 : 1]$ e $p_3 = [1 : 1 : 0]$. Un complementario do subespazo $x - 2z = 0$ vén dado polo subespazo xerado polo vector $e = (1, 0, 0)$. Polo tanto, para calquera vector en $\mathbb{P}^2 \setminus L$ da forma $[a : b : c]$ pomos

$$[a : b : c] = [(1, 0, 0) + v],$$

onde $v = x(0, 1, 0) + y(2, 0, 1)$. Neste caso, un cálculo rutineiro amosa que $v = \left(\frac{2c}{a-2c}, \frac{b}{a-2c}, \frac{c}{a-2c}\right)$. Os vectores v_1, v_2 e v_3 correspondentes aos puntos p_1, p_2 e p_3 , respectivamente, son

$$v_1 = (0, 0, 0), \quad v_2 = (-1, 0, -1/2), \quad v_3 = (0, 1, 0).$$

As imaxes q_i dos puntos p_i son $q_1 = [4 : -1 : 1]$, $q_2 = [-4 : 2 : 0]$ e $q_3 = [4 : 1 : 1]$; de xeito análogo, os vectores w_i correspondentes aos puntos q_i son

$$w_1 = (1, -1/2, 1/2), \quad w_2 = (0, -1/2, 0), \quad w_3 = (1, 1/2, 1/2).$$

Polo tanto, se chamamos f á afinidade e consideramos a base $\{u_1, u_2; p_1\}$, con $u_1 = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 = (-1, 0, -1/2)$ e $u_2 = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 = (0, 1, 0)$, entón

$$\tilde{f}(u_1) = u_1, \quad \tilde{f}(u_2) = u_2, \quad f(p_1) = q_1 = p_1 - u_1 - \frac{1}{2}u_2.$$

Nesta referencia, temos que a matriz é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Problema 2.34. En cada apartado, dar exemplos de afinidades ou proxectividades que cumpran as seguintes propiedades. En caso de que nalgún apartado non existan, xustificalo.

- (a) Unha afinidade $f_1: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ sen puntos fixos e que teña exactamente unha recta invariante.
- (b) Unha afinidade $f_2: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ sen ningunha recta invariante.
- (c) Unha afinidade $f_3: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, diferente da identidade, cunha recta de puntos fixos L e un punto fixo $p \notin L$.
- (d) Unha proxectividade $f_4: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, diferente da identidade, cunha recta de puntos fixos L e un punto fixo $p \notin L$.
- (e) Unha proxectividade $f_5: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ que teña exactamente dous puntos fixos e dúas rectas invariantes.
- (f) Unha proxectividade $f_6: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ que teña exactamente dous puntos fixos e tres rectas invariantes.

Solución. En cada un dos casos, escribimos a matriz na base canónica dunha afinidade ou proxectividade que cumpra as condicións.

- (a) Consideramos a afinidade f_1 representada na base canónica pola matriz

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

A única recta invariante é $y = 0$ e non hai puntos fixos.

- (b) Consideramos a afinidade f_2 representada na base canónica pola matriz

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Non hai puntos fixos nin rectas invariantes.

Alternativamente, pódense dar as ecuacións dun xiro no plano, que ten un punto fixo e ningunha recta invariante.

- (c) Sexan q e r dous puntos da recta L . Entón, $\{p, q, r\}$ é unha referencia baricéntrica do plano, é dicir, son tres puntos afinmente independentes que son fixos por f_3 . Unha afinidade do plano con tres puntos independentes fixos é necesariamente a identidade.
- (d) Consideramos a proxectividade f_4 representada na referencia proxectiva $\mathcal{R} = \{[v_1], [v_2], [v_3], [v_1 + v_2 + v_3]\}$ pola matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entón, a recta $[v_1] \vee [v_2]$ é de puntos fixos, e o punto $[v_3]$ é un punto fixo que non pertence a L .

- (e) Consideramos a proxectividade f_5 representada en $\mathcal{R} = \{[v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_1 + v_2 + v_3 + v_4]\}$ pola matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entón, os únicos puntos fixos son $[v_1]$ e $[v_4]$, mentres que as únicas rectas invariantes son $[v_1] \vee [v_2]$ e $[v_1] \vee [v_4]$.

- (f) Consideramos a proxectividade f_6 representada en $\mathcal{R} = \{[v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_1 + v_2 + v_3 + v_4]\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entón, os únicos puntos fixos son $[v_1]$ e $[v_3]$, mentres que as rectas invariantes son $[v_1] \vee [v_2]$, $[v_3] \vee [v_4]$ e $[v_1] \vee [v_3]$.

Problema 2.35. Sexa $f: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ unha proxectividade diferente da identidade. Supoñamos que f ten un plano de puntos fixos π e que o seu polinomio característico ten exactamente dúas raíces diferentes.

- (i) Demostrar que existe un punto fixo $P \notin \pi$. Escoller unha referencia e determinar a matriz da proxectividade.
- (ii) Demostrar que toda recta que pasa por P é invariante por f . Pode ser de puntos fixos algunha destas rectas?
- (iii) Sexa $Q \in \mathbb{P}^3$ un punto arbitrario, con $Q \neq P$ e $Q \notin \pi$. Sexa $R = (P \vee Q) \cap \pi$. Demostrar que $(P, Q; f(Q), R)$ está ben definida e non depende de Q . Chamámoslle ρ a ese valor.
- (iv) Demostrar que o plano π , o punto P e o valor de ρ determinan completamente f .

Solución. (a) Consideramos unha referencia da forma $\{P_1, P_2, P_3, P_4; U\}$, onde P_1, P_2 e P_3 pertencen ao plano π . Se $P_i = [v_i]$, pola condición de que P_1, P_2 e P_3 sexan fixos, tense que $f(P_i) = [\varphi(v_i)] = [\lambda_i v_i]$, para $i = 1, 2, 3$. Supoñamos que

$\lambda_1 \neq \lambda_2$. Consideremos agora un punto arbitrario na recta $P_1 \vee P_2$ diferente de P_1 e P_2 , que se escribe como $Q = [a_1v_1 + a_2v_2]$, con $a_1, a_2 \neq 0$. Entón,

$$f(Q) = [\varphi(a_1v_1 + a_2v_2)] = [\lambda_1a_1v_1 + \lambda_2a_2v_2],$$

e $\lambda_1a_1v_1 + \lambda_2a_2v_2 = \lambda(a_1v_1 + a_2v_2)$ se, e soamente se, $\lambda_1 = \lambda_2$, o que é unha contradición. Polo tanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

Como existe outro valor propio de φ , ao que chamaremos μ , podemos coller $P = [v]$, onde v é un vector propio de valor propio μ . Claramente o punto P non está no plano π . Por conseguinte, podemos considerar unha referencia $\{P_1, P_2, P_3, P_4; U\}$, onde $P_1, P_2, P_3 \in \pi$ son tres puntos linealmente independentes de π , $P_4 = P$ e U é un punto arbitrario de xeito que o conxunto é unha referencia proxectiva. Sexa $\mathcal{B}_u = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ unha base adaptada. Neste caso, a matriz da proxectividade é

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

- (b) Calquera recta que pasa por $P = [u_4]$ ten dous puntos fixos, o propio P e a intersección da recta co plano π , que denotaremos por $R = [u]$. Polo tanto, trátase dunha recta invariante. Se fose unha recta de puntos fixos, a restricción de f sería a identidade. Sexa Q un punto arbitrario da recta $P \vee R$ diferente de P e R . Entón, $Q = [au + bu_4]$, con $a, b \neq 0$. Tense que

$$f(Q) = [\varphi(au + bu_4)] = [\lambda au + \mu bu_4],$$

e $\lambda au + \mu bu_4$ coincide salvo múltiplo con $au + bu_4$ se, e soamente se, $\lambda = \mu$, que non é certo. Polo tanto, o punto Q non é fixo, e a recta $P \vee R$ ten exactamente dous puntos fixos.

- (c) Sexa $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ e $Q = [a : b : c : d]$. Como $f(Q) = [\lambda a : \lambda b : \lambda c : \mu d]$, e $R = [a : b : c : 0]$, temos que podemos expresar as coordenadas absolutas dos puntos $f(Q)$ e R con respecto a P e Q como

$$\theta_{f(Q)} = \frac{d(\mu - \lambda)}{\lambda} \quad \text{e} \quad \theta_R = -d.$$

Polo tanto, $\rho = \frac{\theta_R}{\theta_{f(Q)}} = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$, que non depende das coordenadas do punto Q . En particular, $\rho \notin \{0, \infty\}$, xa que $\lambda, \mu \neq 0$ e $\lambda \neq \mu$.

Imos dar agora unha solución xeométrica desta cuestión. Consideramos dous puntos Q_1 e Q_2 , e definimos $R_1 = (P \vee Q_1) \cap \pi$ e $R_2 = (P \vee Q_2) \cap \pi$. Consideramos tamén o punto $Q = (Q_1 \vee Q_2) \cap \pi$, que é fixo pola proxectividade f . Polo tanto, como Q, Q_1 e Q_2 están aliñados, $f(Q) = Q$, $f(Q_1)$ e $f(Q_2)$ tamén o están. Por outro lado, o plano $P \vee Q_1 \vee Q_2$ corta π na recta $R_1 \vee R_2$, pero ao mesmo tempo, contén o punto Q . Iso quere dicir que Q está na recta $R_1 \vee R_2$. Sexa agora ℓ_1 a recta $P \vee Q_1$ e ℓ_2 a recta $P \vee Q_2$. Consideramos a perspectividade $g: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ que fixa P e que envía un punto $X \in \ell_1$ a $(Q \vee X) \cap \ell_2$. Como as perspectividades son proxectividades, conservan a razón dobre, e cúmprese que

$$(P, Q_1; f(Q_1), R_1) = (g(P), g(Q_1); g(f(Q_1)), g(R_1)) = (P, Q_2; f(Q_2), R_2).$$

- (d) Se Q é un punto no plano π ou $Q = P$, entón é un punto fixo. En caso contrario, sexa $R = (P \vee Q) \cap \pi$. A recta $\ell = P \vee R$ é unha recta invariante, polo que a imaxe do punto $f(Q)$ pertence a ℓ . Agora, como sabemos que $(P, Q; f(Q), R) = \rho$, sabemos que $\theta_{f(Q)} = \frac{\theta_R}{\rho}$. Unha vez temos a coordenada absoluta de $f(Q)$ con respecto a P e Q , temos totalmente determinada a imaxe do punto, como queriamos ver.

Problema 2.36. Consideramos a proxectividade $f = [\varphi]$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, onde $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é o isomorfismo dado por

$$f(x, y, z, t) = (3x + 2y + 2z + t, 2x + 3y + 2z, 2x + 2y + 3z, t).$$

- (a) Atopar os puntos fixos de f .
 (b) Atopar as rectas invariantes por f .
 (c) Atopar os planos invariantes por f .
 (c) Consideramos os planos

$$\pi_1: 6x + 6y + 6z + t = 0, \quad \pi_2: y - z = 0, \quad \pi_3: t = 0.$$

Usando que π_1 , π_2 e π_3 son invariantes por f , clasificar as proxectividades $f|_{\pi_1}$, $f|_{\pi_2}$ e $f|_{\pi_3}$.

Solución. Antes de nada, comezamos observando que este problema é a versión proxectiva dun dos exercicios afíns do capítulo anterior.

- (a) A forma de Jordan da aplicación lineal asociada á proxectividade é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

e unha base de Jordan é $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ con $v_1 = (-4, 2, 2, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0, -6)$, $v_3 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_4 = (1, 1, 1, 0)$. Os puntos fixos son, por un lado, $P = [v_4]$, e por outro, todos os da recta $L = [v_1] \vee [v_3]$.

- (b) As rectas invariantes correspóndense cos subespazos invariantes de dimensión 2. O polinomio mínimo dun subespazo F pode ser: $(X - 1)(X - 7)$, $(X - 1)$ ou $(X - 1)^2$. No primeiro caso, trátase dunha recta da forma $P \vee Q$, onde $Q \in L$; no segundo, é a recta L ; e, no terceiro, é da forma $[v_1] \vee [v_2 + \lambda v_3]$, con $\lambda \neq 0$.
- (c) Os planos invariantes correspóndense cos subespazos invariantes de dimensión 3. O polinomio mínimo dun subespazo G pode ser: $(X - 1)(X - 7)$, $(X - 1)^2(X - 7)$ ou $(X - 1)^2$. No primeiro caso, trátase do plano $[v_1] \vee [v_3] \vee [v_4] = L \vee P$; no segundo, é da forma $([v_1] \vee [v_2 + \lambda v_3]) \vee [v_4]$; e no terceiro é o plano $[v_1] \vee [v_2] \vee [v_3]$.
- (d) A restrición a π_1 é unha homoloxía especial. A restrición a π_2 é unha proxectividade con dous puntos fixos e dúas rectas invariantes. Finalmente, a restrición a π_3 é unha homoloxía xeral.

Problema 2.37. Dado un triángulo de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con vértices A, B, C e un punto p que non pertence a ningún lado do triángulo, consideremos unha proxectividade $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ que deixa fixo p e permuta os outros vértices entre si, sen deixar ningún deles fixo.

- Demostrar que $f^3 = \text{Id}$.
- Achar os puntos fixos de f .
- Achar as rectas invariantes de f .
- Cambiaría a resposta dos apartados anteriores se en lugar de traballar sobre os reais traballásemos noutro corpo?

Solución. (a) Tense que $\{A, B, C; p\}$ é unha referencia proxectiva, xa que non hai 3 puntos aliñados. Se consideramos a referencia proxectiva $\mathcal{R} = \{A, f(A), f^2(A); p\}$, tense que $\mathcal{R} = \{A, B, C; p\}$ ou $\mathcal{R} = \{A, C, B; p\}$. Nesta referencia, a matriz de f é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix},$$

e se impomos que p é fixo, obtemos que $\alpha = \beta = \gamma$, polo que a matriz de f , módulo produto por escalares, é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz cumpre que $M^3 = \mathbb{I}$; alternativamente, o seu polinomio característico é $-X^3 + 1$, e polo teorema de Cayley–Hamilton tense o resultado.

- Sobre \mathbb{R} , temos a factorización $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$, e $X^2 + X + 1$ non ten máis raíces. Polo tanto, hai un único subespazo invariante de dimensión 1, que se corresponde co punto p .
- Atopar as rectas invariantes correspóndese con atopar os hiperplanos invariantes. Temos que $M^t - \mathbb{I}$ é igual a

$$M^t - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e polo tanto o único subespazo de dimensión invariante é o $\langle(1, 1, 1)\rangle$. Isto quere dicir que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ é unha recta invariante.

- Se traballamos sobre un corpo no que a ecuación $X^2 + X + 1 = 0$ teña solucións, a conclusión dos apartados anteriores non é certa. Por exemplo, nos complexos hai dúas raíces diferentes, e cada unha delas dá lugar a outros dous puntos fixos (e hai tamén outras dúas rectas invariantes). O mesmo sucede nos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para os que $p \geq 3$ e -3 é un cadrado; unha comprobación rutineira amosa que ese é o caso cando $p = 6k + 1$, con $k \geq 1$.

Capítulo 3

Xeometría afín e euclidiana

Os espazos afíns estudados en capítulos anteriores definíronse sobre un espazo vectorial, no que de entrada non había ningunha estrutura adicional. O que faremos agora será introducir nestes espazos vectoriais un produto escalar, que dotará aos espazos afíns das nocións de ángulo e distancia, proporcionando unha estrutura xeométrica máis rica da que tiñamos ata o de agora. En todo o tema supomos que $K = \mathbb{R}$ e que tódolos espazos afíns son espazos afíns reais de dimensión finita. Non resulta complicado adaptar os resultados ao caso complexo, traballando aí con produtos hermíticos.

3.1. Preliminares: espazos vectoriais euclidianos

Sexa E un \mathbb{R} -espazo vectorial de dimensión finita e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produto escalar definido sobre E , é dicir, unha aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que é bilinear, simétrica e definida positiva.

Definición 3.1.1. A *norma* dun vector $v \in E$ defínese como $\|v\| = +\sqrt{\langle v, v \rangle}$ e o *ángulo* entre dous vectores $v, w \in E$ como o valor $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}$.

Ao longo de todo o capítulo suporemos que temos sempre estas nocións de norma e ángulo.

Representación matricial e ortogonalidade

De cara a traballar con produtos escalares, é conveniente introducir a súa representación matricial. Nesta primeira sección, omitimos as demostracións, que se poden consultar en calquera libro de álgebra lineal.

Definición 3.1.2. Sexa E un K -espazo vectorial e sexa $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ unha base. A *matriz dunha forma bilinear* $\phi: E \times E \rightarrow K$ nesa base defínese como

$$\text{Mat}(\phi; \mathcal{B}) := (\phi(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \phi(v_1, v_1) & \phi(v_1, v_2) & \dots & \phi(v_1, v_n) \\ \phi(v_2, v_1) & \phi(v_2, v_2) & \dots & \phi(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(v_n, v_1) & \phi(v_n, v_2) & \dots & \phi(v_n, v_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

Tense que a matriz dunha forma bilinear correspóndese cun produto escalar se, e soamente se, é simétrica e os seus menores principais son positivos; este resultado é o que se coñece como criterio de Sylvester.

Definición 3.1.3. Dous vectores $u, v \in E$ dise que son *ortogonais* ou *perpendiculares* se $\langle u, v \rangle = 0$. Escribiremos $u \perp v$. Dous subconxuntos $S, T \subset E$ dise que son *ortogonais* se $u \perp v$ para todo $u \in S$ e $v \in T$; poremos $S \perp T$. Unha base do espazo E dise *ortogonal* se cada vector da base é ortogonal a tódolos demais, e dise que é *ortonormal* se é ortogonal e todos os seus vectores son unitarios.

Nunha base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$, as coordenadas dun vector $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ cumpren que $x_i = \langle v, v_i \rangle$ e o produto escalar de dous vectores ou a norma dun vector calcúlanse igual que no caso do espazo euclidiano \mathbb{R}^n . É dicir, se $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ e $w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$, entón

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Por último, dicimos que unha matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é *ortonormal* se $A^t A = \mathbb{I}_n$.

Imos describir agora o proceso coñecido como ortonormalización de Gram–Schmidt. É un método algorítmico que permite, a partir dunha base calquera, producir unha base ortonormal (e en particular, amosa que todo espazo euclidiano de dimensión finita ten unha base ortonormal).

Proposición 3.1.1 (Algoritmo de Gram–Schmidt). Sexa $\{u_1, \dots, u_n\}$ unha base do espazo vectorial euclidiano $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Os vectores definidos recursivamente pola fórmula

$$w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|} \quad v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, w_i \rangle w_i$$

para $k = 1, \dots, n$ son unha base ortonormal do espazo.

Finalizamos a sección recordando a noción de proxección ortogonal e o teorema da proxección ortogonal.

Proposición 3.1.2 (Teorema da proxección ortogonal). Para todo subespazo $F \subset E$ dun espazo euclidiano de dimensión finita, o espazo E é a suma ortogonal $E = F \perp F^\perp$, onde

$$F^\perp = \{v \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } u \in F\}.$$

Definición 3.1.4. Sexa $F \subset E$ un subespazo vectorial dun espazo euclidiano. A *proxección ortogonal* do espazo E sobre o subespazo F é a aplicación lineal $\pi_F: E \rightarrow F$ definida como $\pi_F(v) = v_1$ se $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in F$ e $v_2 \in F^\perp$. Do mesmo xeito, a proxección ortogonal en F^\perp é a aplicación $\pi_{F^\perp}: E \rightarrow F^\perp$ definida por $\pi_{F^\perp} v = v_2$.

Proposición 3.1.3. A proxección ortogonal nun subespazo F dun vector $v \in E$ é o vector do subespazo que está máis próximo a v :

$$d(v, \pi_F(v)) = \min\{d(v, w) \mid w \in F\}.$$

Orientación

Unha das nocións propias da xeometría é o concepto de *orientación*.

Definición 3.1.5. Dicimos que dúas bases dun espazo euclidiano E teñen a *mesma orientación* se a matriz de cambio de base S ten determinante positivo, $\det S > 0$. En caso contrario, dicimos que teñen *orientacións opostas*.

Por exemplo, $\{u_1, u_2\}$ e $\{u_2, u_1\}$ teñen orientacións opostas. En xeral, se $\sigma \in S_n$ é un elemento do grupo simétrico, $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}\}$ teñen a mesma orientación se σ é par e orientacións opostas se σ é impar.

No caso do plano, unha orientación consiste en escoller un sentido de xiro (horario ou antihorario). Unha vez escollido, podemos falar do *ángulo orientado* entre dous vectores. Para iso, escollemos unha base ortonormal de \mathbb{R}^2 , que collemos como base positiva. Se $\{u, v\}$ son dous vectores de \mathbb{R}^2 e α é o ángulo non orientado que definen, entón $\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$. Para determinar o *ángulo orientado*, tomamos a seguinte convención:

- Se $\{u, v\}$ forman unha base positiva, entón $\alpha \in (0, \pi)$.
- Se $\{u, v\}$ forman unha base negativa, entón $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.
- Se non forman base, xa tiñamos que $\cos \alpha \in \{\pm 1\}$, e xa distinguíamos os casos $\alpha = 0, \pi$.

Exemplo. Sexa $\{e_1, e_2\}$ unha base ortonormal. Entón, o ángulo formado polos vectores $u = e_1$ e $v = e_2$ (nesa orde) é $\pi/2$; en cambio, o formado por $u = e_2$ e $v = e_1$ é $3\pi/2$. En xeral, se u e v forman un ángulo α , v e u forman un ángulo de $2\pi - \alpha$.

Operador estrela de Hodge e produto vectorial

No caso de \mathbb{R}^3 , o produto vectorial pódese describir dun xeito moi explícito. Sexa $\mathcal{B}_e = \{e_1, e_2, e_3\}$ unha base ortonormal e sexan u e v vectores con coordenadas (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) respectivamente. Entón, podemos definir o *produto vectorial* de u e v , denotado por $u \times v$, como o vector de \mathbb{R}^3

$$u \times v = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Porén, imos dar unha definición máis conceptual.

Proposición 3.1.4. Consideremos fixada unha base $\mathcal{B}_u = \{u_1, u_2, u_3\}$, non necesariamente ortonormal. Dados $v, w \in \mathbb{R}^3$, existe un único elemento $v \times w \in \mathbb{R}^3$ que cumpre

$$\langle c, v \times w \rangle = \det(c, v, w),$$

para todo $c \in \mathbb{R}^3$. Denomínase *produto vectorial de v e w* .

Demostración. Existe unha única aplicación lineal

$$\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad c \mapsto \det(c, v, w),$$

e, polo teorema de representación de Riesz, temos que $\varphi = \langle c, d \rangle$, para $d \in E$. Como $u \times v$ cumpre a definición de d , temos que o produto vectorial está determinado univocamente. \square

En particular, o produto vectorial depende da elección da base. Porén, cando as bases son ortonormais, o resultado está ben definido, é dicir, é o mesmo para calquera elección de base ortonormal (salvo signo).

Proposición 3.1.5. Sexan \mathcal{B}_e e \mathcal{B}'_e dúas bases ortonormais coa mesma orientación. Entón, o produto vectorial $u \times v$ con respecto a esas bases é o mesmo. Se as bases teñen orientacións opostas, é igual ao anterior cambiado de signo.

Demostración. Séguese de xeito inmediato a partir das propiedades dos determinantes e dos cambios de base. \square

As propiedades do produto tensorial recordan, en certo sentido, ás traballadas para o produto exterior. Esta explicación pode ser omitida para o lector que non estea familiarizado cos tensores. Escribimos $A^k(E)$ para o espazo dos tensores antisimétricos de E de orde k . Nese caso, se $\mathcal{B}_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ é unha base e $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$, temos que

$$u \wedge v = (x_2y_3 - x_3y_2)u_2 \wedge u_3 + (x_3y_1 - x_1y_3)u_3 \wedge u_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)u_1 \wedge u_2.$$

Polo tanto, se consideramos agora o isomorfismo

$$*: A^2(E) \longrightarrow E$$

definido por $u_2 \wedge u_3 \mapsto u_1$, $u_3 \wedge u_1 \mapsto u_2$ e $u_1 \wedge u_2 \mapsto u_3$, temos o seguinte.

Proposición 3.1.6. O produto vectorial en \mathbb{R}^3 cumpre que $u \times v = *(u \wedge v)$.

Demostración. Se $u = \sum_{i=1}^3 a_i u_i$ e $v = \sum_{i=1}^3 b_i u_i$, cúmprese que

$$u \wedge v = (a_1b_2 - a_2b_1)u_1 \wedge u_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)u_2 \wedge u_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)u_3 \wedge u_1.$$

Entón,

$$*(u \wedge v) = (a_1b_2 - a_2b_1)u_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)u_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)u_2.$$

Se $c = \sum_{i=1}^3 c_i u_i$, temos que

$$\langle c, v \times w \rangle = c_3(a_1b_2 - a_2b_1) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3).$$

Por outro lado,

$$\det(c, v, w) = c_3(a_1b_2 - a_2b_1) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3),$$

e de aquí dedúcese que a expresión en coordenadas é a mesma, o que quere dicir que as dúas definicións son equivalentes. \square

Imos describir agora algunhas das propiedades máis relevantes do produto vectorial.

Proposición 3.1.7. O produto vectorial é unha aplicación bilineal e antisimétrica $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Cumpre ademais as seguintes propiedades:

- (a) $v \times w \in \langle v, w \rangle^\perp$.
- (b) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é unha base ortonormal coa mesma orientación que \mathcal{B}_u , entón

$$v_3 = v_1 \times v_2, v_2 = v_3 \times v_1, v_1 = v_2 \times v_3.$$

- (c) $(v_1 \times v_2) \times v_3 = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_2, v_3 \rangle v_1$.

Demostración. O feito de que sexa bilineal séguese empregando a definición, xa que o determinante é unha aplicación multilineal. Por outro lado, é alternada porque o determinante é unha aplicación alternada.

- (a) É suficiente con ver que $\langle v, v \times w \rangle = \langle w, v \times w \rangle = 0$. Para iso, observamos que $\langle v, v \times w \rangle = \det(v, v, w) = 0$, e o mesmo ocorre para w .

- (b) Séguese automaticamente dos cálculos en termos das coordenadas.
- (c) Nunha base ortonormal podemos pór $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Entón, calculando cada lado da ecuación por separado chegamos a que ambos son iguais; por exemplo, a primeira compoñente é $x_2(y_1y_3 + z_1z_3) - x_1(y_2y_3 + z_2z_3)$.

□

O operador estrela pódese definir nun contexto máis xeral. Sexa $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espazo euclidiano de dimensión n , non necesariamente igual a 3. Isto induce, á súa vez, un produto escalar en $\wedge^k E$, para $0 \leq k$. Para iso, se $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ e $\beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$, definimos

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \det \left(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle_{i,j=1}^k \right),$$

e estendemos a $\wedge^k E$ por linealidade. Por último, unha vez fixada unha base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de E , definimos

$$\omega = u_1 \wedge \cdots \wedge u_n.$$

Definición 3.1.6. O operador estrela de Hodge é a única aplicación $*$: $A^k(E) \rightarrow A^{n-k}(E)$ de xeito que

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega,$$

para calquera $\alpha, \beta \in A^k(E)$.

Observamos que os espazos teñen a mesma dimensión xa que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, polo que ambos subespazos son isomorfismos, pero o importante do resultado é que o operador estrela de Hodge realiza de forma explícita o isomorfismo.

Imos fixar unha base de E , $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ e considerar o caso no que $\alpha = a \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$. Se β contén algún u_i , con $k+1 \leq i \leq n$, na súa expansión, entón temos que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Polo tanto, o único caso no que podemos sacar algunha información interesante é cando $\beta = b \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$. Nese caso, $\langle \alpha, \beta \rangle = ab$. Polo tanto, $*\beta = bu_{k+1} \wedge \cdots \wedge u_n$.

Proposición 3.1.8. O operador estrela de Hodge está ben definido, é dicir, existe un único operador lineal para o cal, fixados $\alpha, \beta \in A^k(E)$, cúmprese que $\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$. Ademais, é un isomorfismo.

Demostración. Está claro que o operador así definido é lineal. Entón, é suficiente con achar o valor de $*(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k})$. Para iso, sexan $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ de xeito que $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$. Entón,

$$*(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k}) = \pm u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_{n-k}},$$

onde o signo é $+1$ se $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$ é unha permutación par e -1 en caso contrario. Isto determina os vectores nunha base e, polo tanto, en calquera elemento. Por último, o feito de que sexa un isomorfismo séguese de que a aplicación envía unha base de $A^k(E)$ a unha base de $A^{n-k}(E)$. □

A seguinte proposición é inmediata a partir da discusión anterior.

Proposición 3.1.9. O produto vectorial en \mathbb{R}^3 cumpre que $u \times v = *(u \wedge v)$.

O operador estrela de Hodge aparece en numerosos contextos, non só na xeometría, senón, por exemplo, ao desenvolver a teoría de integración en variedades.

3.2. Propiedades métricas

Definición 3.2.1. Un *espazo afín euclidiano* de dimensión n é un espazo afín \mathbb{A}^n cun produto escalar fixado no espazo vectorial asociado $E = \mathbb{R}^n$. Escribiremos \mathbb{E}^n para referirnos a un espazo afín euclidiano de dimensión n .

Dispor dun produto escalar permítenos introducir a noción de distancia.

Definición 3.2.2. Dados $p, q \in \mathbb{E}^n$, a distancia de p a q defínese como

$$d(p, q) = \|q - p\|.$$

Distancias en espazos euclidianos

Definición 3.2.3. Dados $p, q \in \mathbb{E}^n$, a distancia de p a q é $d(p, q) = \|q - p\|$.

Esta distancia cumpre as propiedades habituais de positividade, simetría e a desigualdade triangular. En xeral, a distancia entre dous conxuntos A e B en \mathbb{R}^n defínese como

$$d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b).$$

En xeral, este ínfimo non ten por que ser un mínimo, aínda que si o é, por exemplo, cando os dous conxuntos son compactos. Porén, ese non é o caso das variedades lineais, xa que non son limitadas. En calquera caso, podemos aplicar un argumento de tipo alxébrico para establecer que o ínfimo é tamén un mínimo neste caso.

Proposición 3.2.1. Sexan $V = a + F$ e $W = b + G$ dúas variedades lineais de \mathbb{E}^n . Entón existen $p \in V$ e $q \in W$ de xeito que

$$d(p, q) = \min_{\substack{p' \in V \\ q' \in W}} d(p', q').$$

Ademais, esta distancia mínima chámase *distancia de V a W* e están caracterizados pola condición $\mathbf{pq} \in (F + G)^\perp$.

Demostración. Se $V \cap W$ é non baleira, entón hai un punto p na intersección. Collendo $q = p$, temos que $0 = d(p, q) = d(V, W)$.

Supoñamos agora que a intersección é non baleira, polo que $\mathbf{ab} \notin F + G$. Sexa $H = F + G + \mathbf{ab}$, e polo teorema da proxección ortogonal podemos escribir $E = (F + G) \oplus (F + G)^\perp$, onde $(F + G)^\perp$ é o ortogonal de $F + G$ en H (en particular, $F + G$ ten codimensión 1 en H). Escribimos entón $\mathbf{ab} = u_1 + u_2 + v$, onde $u_1 \in F$, $u_2 \in G$ e $v \in (F + G)^\perp$. Temos agora que $p = a + u_1 \in V$ e $q = b - u_2 \in W$. En particular,

$$\mathbf{pq} = b - u_2 - a + u_1 = \mathbf{ab} - u_1 - u_2 = v \in (F + G)^\perp.$$

Polo tanto, os puntos p e q cumpren que $\mathbf{pq} \in (F + G)^\perp$.

Sexan agora $p' \in V$ e $q' \in W$ dous puntos arbitrarios. Entón,

$$\begin{aligned} d(p', q')^2 &= \|q' - p'\|^2 \\ &= \|q' - q + q - p' + p - p\|^2 \\ &= \|(p - p') + (q' - q) + (q - p)\|^2 \\ &= \|(p - p') + (q - q')\|^2 + \|q - p\|^2 \\ &\geq \|q - p\|^2. \end{aligned}$$

Polo tanto, $d(p', q') \geq d(p, q)$, e a igualdade cúmprese se, e soamente se, $p' = p$ e $q' = q$. Na cadea de igualdades anterior, empregamos que se $t = t_1 + t_2$, con $t_1 \in (F + G)$ e $t_2 \in (F + G)^\perp$, entón $\|t\|^2 = \|t_1\|^2 + \|t_2\|^2$. \square

En particular, o resultado anterior proba que $d(V, W) = d(p, q)$, onde $p \in V$, $q \in W$ e $\mathbf{pq} \in (F + G)^\perp$; non só iso, senón que

$$d(V, W) = \|\pi_{(F+G)^\perp}(\mathbf{ab})\|.$$

Para determinar a distancia entre dúas variedades lineais afíns podemos empregar o seguinte procedemento. Pomos $V = a + F$ e $W = b + G$, con $F = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ e $G = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$. Como $p - q \in (F + G)^\perp$, podemos impoñer que $\langle p - q, v_i \rangle = 0$ para todo i e $\langle p - q, w_j \rangle = 0$ para todo j .

Exemplo. Consideramos o espazo afín euclidiano \mathbb{E}^3 co produto escalar estándar. Consideramos as rectas

$$V = (1, 2, 3) + \langle (1, 0, 0) \rangle, \quad W = (0, 0, 0) + \langle (0, 2, 4) \rangle.$$

Neste caso, $\mathbf{ab} = (-1, -2, -3)$ e $(F + G)^\perp = \langle (0, -2, 1) \rangle$. Consideramos a descomposición de \mathbf{ab}^\perp como suma dun vector de $(F + G)$ e outro do seu ortogonal. Entón,

$$(-1, -2, -3) = \left(-1, -\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right) + \left(0, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Polo tanto,

$$d(V, W) = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Casos particulares de distancias

Imos explorar en detalle o cálculo de distancias entre variedades afíns en certos casos particulares. O máis sinxelo consiste en atopar a distancia entre un punto e un hiperplano en \mathbb{E}^n .

Proposición 3.2.2. Sexa $H: a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$ un hiperplano en \mathbb{E}^n e sexa $p = (p_1, \dots, p_n)$ un punto calquera. Entón, a distancia $d(p, H)$ vén dada pola fórmula

$$d(p, H) = \frac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Demostración. Sexa $q \in H$ a proxección ortogonal de p en H . Tense entón que $p - q$ é ortogonal ao subespazo director do plano, polo que en particular é un múltiplo de (a_1, \dots, a_n) . É dicir, se $q = (q_1, \dots, q_n)$ tense que cumprir que $(q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n) \in \langle (a_1, \dots, a_n) \rangle$. Alternativamente, (q_1, \dots, q_n) é a intersección da recta $(p_1, \dots, p_n) + t \cdot (a_1, \dots, a_n)$ con H . Polo tanto,

$$t = -\frac{a_1p_1 + \dots + a_np_n + b}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Finalmente, $d(p, H) = |t|\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$, de onde se segue o resultado. \square

Hai outros dous casos especialmente representativos, que é o cálculo da distancia entre un punto e unha recta en \mathbb{E}^3 e a distancia entre dúas rectas en \mathbb{E}^3 .

Proposición 3.2.3. Sexa $p \in \mathbb{E}^3$ un punto e $r: q + \langle v \rangle$ unha recta. Se $u = p - q$, entón

$$d(p, r) = \frac{\|u \times v\|}{\|v\|}.$$

Demostración. Sexa q' o punto de r de xeito que $\mathbf{p}q'$ é perpendicular a v . Entón, temos que $d(p, r) = \|q' - p\|$. Temos que $\mathbf{q}p = \mathbf{q}q' + \mathbf{q}'p$, e facendo a ambos lados o produto vectorial por v , temos que

$$u \times v = \mathbf{q}'p \times v.$$

Como $\mathbf{q}'p$ é perpendicular a v , entón temos que $\|\mathbf{q}'p \times v\| = d(p, r)\|v\|$. Polo tanto,

$$d(p, r) = \frac{\|u \times v\|}{\|v\|}.$$

□

Proposición 3.2.4. Sexan $r: a + \langle u \rangle$ e $s: b + \langle v \rangle$ dúas rectas en \mathbb{E}^3 . Entón,

$$d(r, s) = \frac{|\det(a - b, u, v)|}{\|u \times v\|}.$$

Demostración. Pomos $a - b = \lambda v + \mu w + \nu v \times w$, xa que $v \times w \in \langle v, w \rangle$. Facendo o produto escalar con $v \times w$, temos que

$$\langle a - b, v \times w \rangle = \nu \|v \times w\|^2,$$

e de aquí dedúcese o resultado. □

O determinante de Gram

Unha noción esencial para o cálculo de áreas e volumes é a seguinte.

Definición 3.2.4. Sexan $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. O *determinante de Gram* dos m vectores é

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\dots,m}.$$

A seguinte proposición resume algunhas das propiedades do determinante de Gram. A primeira indica que cando os vectores non son linealmente independentes, o determinante de Gram é cero, mentres que a segunda é unha xeneralización da fórmula para a área dun paralelogramo (produto das lonxitudes da base e da altura).

Proposición 3.2.5. O determinante de Gram cumpre as seguintes propiedades.

- (a) $G(v_1, \dots, v_m) \geq 0$ e $G(v_1, \dots, v_m) = 0$ se, e soamente se, v_1, \dots, v_m son linealmente dependentes.
- (b) $G(v_1, \dots, v_m) = \|v'_m\|^2 G(v_1, \dots, v_{m-1})$, onde v'_m é a proxección ortogonal de v_m en $\langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle^\perp$.

Demostración. (a) Sexa $E = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Se E ten dimensión m , é dicir, se os vectores son linealmente independentes, entón $G(v_1, \dots, v_m)$ é a matriz do produto escalar nesa base, polo que é maior que 0 pola condición de ser definida positiva.

Se, ao contrario, un vector é combinación lineal dos outros, o determinante é cero. Supoñamos, sen perder xeneralidade, que $v_m = \sum_{i=1}^{m-1} a_i v_i$. Nese caso, se f_i é a fila i -ésima da matriz $G(v_1, \dots, v_m)$, temos que $f_m = \sum_{i=1}^{m-1} a_i f_i$, polo que o determinante é 0.

- (b) Sexan $E = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ e $F = \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle$. Entón, como $E = F \oplus F^\perp$, podemos escribir $v_m = v'_m + v''_m$, con $v'_m \in F^\perp$ e $v''_m \in F$. Temos que $\langle v'_m, v_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, m-1$. Sexa S a matriz que ten por columnas os v_i escritos nunha base ortogonal fixada, de xeito que $S^t S$ é a matriz correspondente ao produto escalar. Sexa S' a matriz cadrada de tamaño $m-1$ que ten por columnas os primeiros $m-1$ vectores. Entón, usando a condición de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \det(S^t S) &= \begin{pmatrix} (S')^t S' & (S')^t v''_m \\ (v''_m)^t S' & \|v'_m\|^2 + \|v''_m\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (S')^t S' & (S')^t v''_m \\ (v''_m)^t S' & \|v''_m\|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (S')^t S' & 0 \\ (v''_m)^t S' & \|v'_m\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \|v'_m\| G(v_1, \dots, v_{m-1}). \end{aligned}$$

□

Definición 3.2.5. O *volume do paralelepípedo* determinado polos m vectores v_1, \dots, v_m é

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}.$$

No caso $m = 2$, fálase da *área do paralelogramo* determinado polos dous vectores v_1, v_2 .

No caso dun triángulo determinado polos dous vectores v_1 e v_2 , a área é a metade da correspondente ao paralelogramo; e no caso dun tetraedro limitado por vectores v_1, v_2 e v_3 , o volume é unha sexta parte do correspondente ao paralelepípedo.

3.3. Isometrías e movementos

Definición 3.3.1. Sexa E un espazo euclidiano (ou hermítico) e $f \in \text{End}(E)$ un endomorfismo. Dicimos que f é unha *isometría* se conserva o produto escalar, é dicir, se

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

para todo $u, v \in E$. As isometrías adoitan chamarse *aplicación ortogonais*.

O seguinte resultado, coñecido como *teorema de estrutura das isometrías*, caracteriza a forma dunha isometría arbitraria nun espazo euclidiano.

Proposición 3.3.1. Sexa E un espazo vectorial euclidiano e $f \in \text{End}(E)$ unha aplicación ortogonal. Existe unha base ortonormal de E na que a matriz correspondente a f é unha matriz diagonal por bloques con elementos iguais a 1 e -1 na diagonal e logo bloques A_i , de tamaño 2×2 e da forma $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$, con $a_i^2 + b_i^2 = 1$.

Definición 3.3.2. Unha aplicación $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é un *movemento* se conserva as distancias, é dicir, se

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q)$$

para todo $p, q \in \mathbb{E}^n$.

Para a seguinte proposición, escribimos τ_v para a translación de vector v .

Teorema 3.3.1. Todo movemento de \mathbb{E}^n é unha afinidade bixectiva. Máis en concreto, f é un movemento de \mathbb{E}^n se, e soamente se, $f = \tau_v + \tilde{f}$, para un certo $v \in \mathbb{R}^n$ e unha isometría \tilde{f} de \mathbb{R}^n .

Demostración. Unha implicación é inmediata: se f é unha aplicación afín de xeito que a aplicación lineal asociada é unha isometría, entón é obvio que se preservan as distancias xa que se preservan as normas.

Imos demostrar agora o recíproco. Sexa f un movemento e fixemos un punto $p \in \mathbb{E}$. Temos entón que $\|f(q) - f(p)\| = \|q - p\|$ para todo q , polo que se conservan as normas. Fixamos tamén unha referencia $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n; p\}$ de xeito que a base $\{e_1, \dots, e_n\}$ é ortonormal. Entón, podemos escribir $\mathbf{pq} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ e, de cara a establecer o resultado, queremos probar que $\tilde{f}(\mathbf{pq}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{f}(e_i)$.

É inmediato que a aplicación \tilde{f} conserva as normas, xa que, pondo $u = \mathbf{pq}$, con $q \in \mathbb{E}$,

$$\|\tilde{f}(\mathbf{pq})\| = \|f(q) - f(p)\| = \|q - p\| = \|u\|.$$

Polo tanto, preserva os produtos escalares. É dicir, chega con que a aplicación asociada entre espazos vectoriais sexa lineal, porque como conserva normas e produtos escalares, será automaticamente unha isometría.

Polo feito de conservar os produtos escalares, $\{\tilde{f}(e_1), \dots, \tilde{f}(e_n)\}$ é unha base ortonormal. Nese caso, se $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ e $\tilde{f}(u) = \sum_{i=1}^n \mu_i \tilde{f}(e_i)$, temos que $\mu_i = \langle \tilde{f}(u), \tilde{f}(e_i) \rangle = \langle u, e_i \rangle = \lambda_i$, polo que $\tilde{f}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{f}(e_i)$. Conclúese que \tilde{f} é unha aplicación lineal que preserva as normas, isto é, unha isometría. \square

O resultado anterior dinos que se f é un movemento, entón existe unha referencia ortonormal na cal a matriz da aplicación lineal asociada é unha matriz ortogonal.

Definición 3.3.3. Dicimos que un movemento de f de \mathbb{E}^n é *directo* se $\det \tilde{f} = 1$ e *inverso* se $\det \tilde{f} = -1$.

No caso de \mathbb{E}^1 , as afinidades son as translacións e as homotecias; neste último caso, temos que se tratan de movementos unicamente cando a razón é -1 .

Proposición 3.3.2. Sexa $f: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$ un movemento. Entón, f é unha translación ou unha simetría con respecto a un punto.

Demostración. As afinidades da recta son as translacións e as homotecias. As primeiras sempre son movementos, mentres que as segundas unicamente o son cando a razón ten módulo 1, o que sucede unicamente cando é -1 ; nese caso, correspóndese coa simetría con respecto a un punto. \square

Falar de distancias permite introducir xa conceptos como o de *circunferencia*, que teñen gran importancia no estudo da xeometría clásica.

Definición 3.3.4. Unha circunferencia de centro p e radio r nun plano afín \mathbb{E}^2 é o lugar xeométrico dos puntos que están a distancia r do punto p . É dicir,

$$\mathcal{C}(p; r) = \{q \in \mathbb{E}^2 \mid d(p, q) = r\}.$$

Nas seguintes seccións imos abordar o problema da clasificación de movementos. En matemáticas, é habitual querer clasificar tódolos obxectos dun mesmo tipo, é dicir, agrupalos en diferentes tipos segundo as súas propiedades e establecer que sempre se dará un deses casos. Un dos casos máis coñecidos é o problema da clasificación dos grupos finitos simples, que establece que todo grupo finito simple (é dicir, que non ten subgrupos normais non triviais) é ou ben da forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, con p primo; da forma A_n , onde A_n é o grupo alternado de n elementos; un grupo de *tipo Lie*; ou senón un dos 27 *grupos esporádicos*. Aquí, o que imos establecer é a clasificación de movementos en dimensión 2 ou 3, isto é, demostrar que calquera movemento en \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 pertence a unha das cinco ou sete familias que imos describir, respectivamente.

3.4. Clasificación de movimientos no plano

O obxectivo desta sección e da seguinte é facer unha clasificación de movementos no plano e no espazo, isto é, estudar tódalas posibilidades que se poden dar nestes casos de dimensión baixas.

Sexa $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ un movemento. Nunha referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{u_1, u_2; p\}$, \tilde{f} será unha matriz ortogonal. Como fixemos no caso das afinidades, imos distinguir catro casos principais segundo a dimensión da variedade de puntos fixos V .

- (a) $\dim V = 2$. Neste caso, $f = \text{Id}$.
- (b) $\dim V = 1$. Isto quere dicir que 1 é un valor propio, pero a matriz de \tilde{f} non pode ser a identidade, xa que iso queredría dicir que é unha translación. Polo tanto, o outro valor propio ten que ser -1 , e iso quere dicir que nunha referencia da forma $\{v_1, v_2; p\}$, onde v_1 e v_2 son vectores propios de valores propios 1 e -1 , respectivamente, e p é un punto fixo, o movemento ten a forma

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Isto quere dicir que f é unha *simetría axial (ortogonal) respecto unha recta r* , que se chama eixe da simetría.

- (-) O eixe da simetría é a única recta de puntos fixos.
- (-) As rectas invariantes son a recta fixa $r: p + \langle u_1 \rangle$ e tódalas ortogonais a r . Convén notar que unha simetría axial é un caso particular de homoloxía xeral.

Exemplo. Sexa f a simetría axial ortogonal con respecto á recta $x - y = 0$. Entón, a imaxe da orixe é a propia orixe; ademais, $\tilde{f}(1, 0) = (0, 1)$ e $\tilde{f}(0, 1) = (1, 0)$. Polo tanto, a matriz na base canónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

- (c) $\dim V = 0$. Neste caso o 1 non é un valor propio, polo que ou o -1 é un valor propio dobre (e nese caso sería un xiro de ángulo π) ou hai dous valores propios complexos conxugados de módulo 1. A forma reducida é da forma

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (-) A matriz reducida é a mesma en calquera sistema de referencia ortonormal que teña como orixe o único punto fixo.
- (-) Non hai rectas invariantes.

Se f é un xiro, tense que $\text{Tr}(\tilde{f}) = 2 \cos \alpha$; isto permite determinar o ángulo salvo signo, é dicir, falta establecer se o xiro é positivo (no sentido contrario ás agullas do reloxo) ou negativo (no sentido das agullas do reloxo). Para iso, cóllese un vector arbitrario v e mírase se $\{v, \tilde{f}(v)\}$ forman unha base de orientación positiva. É dicir, o ángulo estará no intervalo $(0, \pi)$ se, e soamente se, $\det(v, \tilde{f}(v)) > 0$.

Exemplo. Sexa f o xiro con centro no punto $(1, 1)$ e ángulo $\pi/4$. Entón, a imaxe da orixe é o punto $(1, 1 - \sqrt{2})$. Polo tanto, a matriz na base canónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1 - \sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

A matriz correspondente á parte lineal será a mesma noutra base ortonormal coa mesma orientación.

- (d) $V = \emptyset$. Neste caso o 1 é un valor propio de \tilde{f} . Se é valor propio dobre, entón f é unha translación. En caso contrario, o outro valor propio é -1 . O movemento é a composición dunha simetría axial e unha translación paralela ao eixe da simetría e chamámoslle *simetría axial esvaradía*. A forma reducida é

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde a referencia se escolleu de xeito que a orixe é un punto da recta invariante r e $\{u_1, u_2\}$ é unha base ortonormal na que u_1 é o vector director da recta invariante.

- (-) Hai unha única recta invariante, a corresponde a $p + \langle u_1 \rangle$.

Exemplo. Sexa f a simetría con respecto á recta $x - y = 0$ seguida dunha translación de vector $(1, 1)$. A imaxe da orixe é o $(1, 1)$, mentres que $\tilde{f}(1, 0) = (0, 1)$ e $\tilde{f}(0, 1) = (1, 0)$. Polo tanto, a matriz na base canónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

A recta invariante é o eixe da simetría, $x - y = 0$.

Hai polo tanto 5 opcións: a identidade, unha simetría axial, un xiro, unha translación ou unha simetría axial esvaradía.

O seguinte teorema resume a discusión anterior.

Teorema 3.4.1. Sexa $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ un movemento.

- (i) Se f é un movemento directo, entón f é unha translación (incluíndo a identidade) ou un xiro.
- (ii) Se f é un movemento inverso, entón f é unha simetría axial ou unha simetría axial esvaradía.

Demostración. A demostración séguese da análise que se fixo anteriormente segundo a dimensión da variedade de puntos fixos. \square

Proposición 3.4.1. A composición de xiros e simetrías cumpre as seguintes propiedades:

- (a) A composición de dous xiros é un xiro, e o ángulo correspondente a suma dos dous ángulos.

- (b) A composición de dúas simetrías axiais é unha translación ou un xiro: se f_1 e f_2 son simetrías axiais de eixes r_1 e r_2 , entón $f = f_2 \circ f_1$ é unha translación se r_1 e r_2 son paralelas e un xiro centrado no punto de intersección dos dous eixes en caso contrario.

Demostración. (a) Consideramos un sistema de referencia centrado na orixe do primeiro xiro. Temos entón que o produto de matrices

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos \beta & -\sin \beta & a \\ \sin \beta & \cos \beta & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

é precisamente

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & a \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Obtemos polo tanto un xiro de ángulo $\alpha + \beta$.

- (b) Imos comezar observando que a composición de dúas simetrías axiais de eixes L_1 e L_2 que se cortan en \mathcal{O} e que forman un ángulo α é un xiro de ángulo 2α e de centro \mathcal{O} . Consideramos unha referencia ortogonal $\{v_1, v_2; \mathcal{O}\}$, onde \mathcal{O} é a intersección dos eixes e v_1 coincide coa dirección de L_1 . Se o ángulo entre L_1 e L_2 é φ (en sentido positivo), a composición das dúas simetrías é

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

A continuación, consideramos a composición de dúas simetrías axiais de eixes paralelos L_1 e L_2 . Consideramos unha referencia ortogonal $\{v_1, v_2; \mathcal{O}\}$, de xeito que \mathcal{O} pase por L_1 e L_1 teña a dirección de v_1 . Polo tanto, a primeira simetría é a simetría ortogonal con respecto a $y = 0$, e a segunda é a simetría ortogonal con respecto a $y = a$, para algún $a \in \mathbb{R}$. Polo tanto, a imaxe dun punto (x, y) é $(x, 2a + y)$, polo que a composición é unha translación de vector $(0, 2a)$, isto é, o vector de translación é perpendicular ás dúas rectas e a lonxitude é o dobre da distancia entre elas.

□

Proposición 3.4.2. Calquera movemento de \mathbb{E}^2 se pode escribir como a composición de, como moito, 2 ou 3 simetrías axiais.

Demostración. Temos que distinguir os cinco casos posibles. Se f é a identidade ou unha simetría axial, o resultado é evidente.

Un xiro de centro \mathcal{O} e ángulo α podémolo escribir como a composición de dúas simetrías de eixes L_1 e L_2 que se corten no punto \mathcal{O} e formen un ángulo $\alpha/2$.

No caso dunha translación, sabemos que é composición de dúas simetrías axiais, tomando os eixes perpendiculares ao vector de translación e de xeito que a separación entre eles sexa a metade do módulo do vector de translación.

Finalmente, cando é unha simetría axial esvaradía, escribimos a translación como a composición de dúas simetrías, e aí necesitamos en total tres simetrías axiais (as dúas da translación máis a do propio movemento).

□

3.5. Clasificación de movementos no espazo

Sexa $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ un movemento. Nunha referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{u_1, u_2; p\}$, \tilde{f} será unha matriz ortogonal. Como fixemos no caso das afinidades, imos distinguir catro casos principais segundo a dimensión da variedade de puntos fixos V .

- (a) $\dim V = 3$. Neste caso, $f = \text{Id}$.
- (b) $\dim V = 2$. Neste caso, o 1 é un valor propio dobre, polo que o outro valor propio ten que ser -1 , e iso quere dicir que nunha referencia da forma $\{v_1, v_2, v_3; p\}$, onde v_1 e v_2 son vectores propios de valor propio 1 e v_3 de valor propio -1 e p un punto fixo, o movemento ten a forma

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Isto quere dicir que f é unha *simetría especular (ortogonal) respecto un plano π* , que se chama eixe da simetría.

- (-) O *plano de simetría* é o único plano fixo π , que ten como subespazo director $\langle u_1, u_2 \rangle$ o subespazo de vectores propios de valor propio 1.
- (-) A *dirección de simetría* vén dada por un vector propio de valor propio -1 .

Exemplo. Sexa f a simetría especular con respecto ao plano $x + y + z = 0$. Entón, calquera vector contido no plano é un vector propio de valor propio 1, mentres que calquera vector normal ao plano é un vector propio de valor propio -1 . Polo tanto,

$$\tilde{f}(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad \tilde{f}(1, 0, -1) = (1, 0, -1), \quad \tilde{f}(1, 1, 1) = (-1, -1, -1).$$

Facendo operacións elementais, chegamos a que a matriz na referencia canónica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- (c) $\dim V = 1$. Neste caso o 1 non é un valor propio, polo que os outros vectores ou son -1 (dobre) ou son dous valores propios complexos conxugados de módulo 1. En calquera caso, podemos escoller unha base directa de \mathbb{E}^3 na que escriba

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- (-) O *eixe* da rotación é a única recta fixa r , que ten como vector director u o vector propio de valor propio 1.
- (-) O ángulo da rotación determínase facendo $1 + 2 \cos \alpha = \text{Tr}(\tilde{f})$. Para determinar se o ángulo é positivo ou negativo, cóllese un vector v no ortogonal de u e áchase $\det(u, v, \tilde{f}(v))$; se é positivo, o ángulo é positivo; e se é negativo, o ángulo é negativo.

Exemplo. Consideremos o movemento dado por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Trátase dun movemento que ten unha recta de puntos fixos, que é a que se corresponde a $x = y = z$; polo tanto, ese é o eixe da rotación. Tense que o ángulo de rotación α cumpre que $1 + 2 \cos \alpha = 2$, polo que $\alpha = \pm\pi/3$. Para determinar o signo, miramos a orientación dunha base dada por $\{u, v, \tilde{f}(v)\}$, onde $u = (1, 1, 1)$ e v é un vector arbitrario, por exemplo, $v = (1, 0, 0)$. Como $\det(u, v, \tilde{f}(v)) > 0$, tense que $\alpha = \pi/3$.

- (d) $\dim V = 0$. Como o 1 non é un valor propio, o -1 é un valor propio (podería ser simple ou triplo). En calquera caso, temos que nunha referencia reducida a matriz é

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

É dicir, f é unha composición dunha simetría especular e unha rotación.

- (-) A dirección de simetría é a única recta invariante r , que ten como vector director u o vector propio de valor propio -1 .
 - (-) O ángulo da rotación determínase facendo $-1 + 2 \cos \alpha = \text{Tr}(\tilde{f})$. Para determinar se o ángulo é positivo ou negativo, cóllese un vector v no ortogonal de u e áchase $\det(u, v, \tilde{f}(v))$; se é positivo, o ángulo é positivo; e se é negativo, o ángulo é negativo.
- (e) $V = \emptyset$. Neste caso o 1 é un valor propio de \tilde{f} . Imos distinguir tres casos segundo a multiplicidade do valor propio 1.

- (i) Se o 1 é valor propio triplo, entón f é unha translación. Neste caso, a matriz de \tilde{f} é a identidade en calquera base. As variedades invariantes son todas aquelas que conteñen o vector da translación.
- (ii) Se o 1 é valor propio dobre, entón o outro valor propio é o -1 , e f pode escribirse como a composición dunha simetría especular e unha translación paralela ao eixe de simetría; é o que se coñece como *simetría especular esvaradía*. Unha comprobación rutineira amosa que hai rectas invariantes asociadas ao valor propio 1. Polo tanto, na referencia adaptada, o movemento escríbese como

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $a \neq 0$.

- (-) O *plano de simetría* é o único plano invariante π , que ten como subespazo director $\langle u_1, u_2 \rangle$ o subespazo de vectores propios de valor propio 1.

- (-) A *dirección de simetría* vén dada por un vector propio de valor propio -1 .
- (-) Para determinar o vector de translación, cóllese un punto $p \in \pi$ no plano invariante e calcúlase $v = \mathbf{p}f(\mathbf{p})$.
- (-) As únicas variedades invariantes son o plano $r: p + \langle u_1, u_2 \rangle$ e as rectas contidas nel que teñen a dirección do vector de translación.

Exemplo. Consideremos o movemento f dado pola matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Trátase dun movemento inverso porque o determinante é -1 ; ademais, comprobábase facilmente que non ten puntos fixos, polo que se trata dunha simetría especular esvaradía. O subespazo de vectores propios de valor propio 1 é o $\langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$, e o de valor propio -1 é o $\langle (1, 0, -1) \rangle$. O plano invariante é o $x - z = 0$; pódese achar collendo un punto calquera (x, y, z) e impondo

$$f(x, y, z) - (x, y, z) \in \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle.$$

Finalmente, para determinar o vector de translación, collemos un punto do plano, por exemplo o $(0, 0, 0)$ e calculamos $v = f(0, 0, 0) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$. É dicir, trátase dunha simetría con respecto ao plano $x - z = 0$ seguida dunha translación de vector $(1, 1, 1)$.

- (iii) Se o 1 é valor propio simple, entón trátase dunha rotación de eixe r e unha translación paralela ao eixe. Unha comprobación rutineira amosa que hai rectas invariantes asociadas ao valor propio 1 . Chámase entón *movemento helicoidal* e a súa forma reducida é

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $a \neq 0$.

- (-) O *eixe* da rotación é a única recta invariante r , que ten como vector director u o vector propio de valor propio 1 .
- (-) O ángulo da rotación determínase facendo $1 + 2 \cos \alpha = \text{Tr}(\tilde{f})$. Para determinar se o ángulo é positivo ou negativo, cóllese un vector v no ortogonal de u e áchase $\det(u, v, \tilde{f}(v))$; se é positivo, o ángulo é positivo; e se é negativo, o ángulo é negativo.
- (-) Para determinar o vector de translación, cóllese un punto p no eixe e calcúlase $v = \mathbf{p}f(\mathbf{p})$.
- (-) A única variedade invariante é o eixe $r: p + \langle u_1 \rangle$.

Exemplo. Consideremos o movemento f dado pola matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Trátase dun movemento directo porque o determinante é $+1$; ademais, compróbase facilmente que non ten puntos fixos, e como a matriz da parte lineal non é a identidade, trátase dun movemento helicoidal. O eixe de rotación correspóndese coa recta invariante; para atopar a súa dirección, achamos o vector propio de valor propio 1 , que é o $(1, 1, 1)$; para determinar un punto de paso, impomos

$$(y + 1 - x, z + 1 - y, x + 1 - z) \in \langle (1, 1, 1) \rangle,$$

polo que podemos coller o punto $(1, 1, 1)$. É dicir, o eixe é $(1, 1, 1) + \langle (1, 1, 1) \rangle$. Para atopar o ángulo de rotación pomos $1 + 2 \cos \alpha = 0$, de onde queda que $\cos \alpha = -1/2$. Polo tanto, $\alpha = \pm 2\pi/3$. Para saber se o ángulo é positivo ou negativo, sexa $u = (1, 1, 1)$ o vector director do eixe e $v = (1, -1, 0)$ un vector no ortogonal. Entón,

$$\det(u, v, \tilde{f}(v)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0,$$

polo que $\alpha = -2\pi/3$. O vector da translación obtense collendo un punto do eixe, por exemplo o $p = (1, 1, 1)$. Entón,

$$v = f(p) - p = (2, 2, 2) - (1, 1, 1) = (1, 1, 1),$$

polo que este é o vector da translación.

Teorema 3.5.1. Sexa $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movemento.

- (i) Se f é un movemento directo, entón f é unha translación (incluíndo a identidade), unha rotación ou un movemento helicoidal.
- (ii) Se f é un movemento inverso, entón f é unha simetría especular, unha simetría especular esvaradía ou a composición dunha rotación cunha simetría especular.

Demostración. A demostración séguese da análise que se fixo anteriormente segundo a dimensión da variedade de puntos fixos. \square

A clasificación de movementos pódese continuar en dimensións superiores, empregando o teorema de estrutura das isometrías como punto de partida. Porén, en dimensión 4 (e superior), xa comezan a aparecer casos bastante complexos nos que resulta complicado manter a intuición xeométrica. Por exemplo, en dimensión 4, a isometría pode estar formada por dous bloques de senos e cosenos.

Composición de movementos no espazo

Proposición 3.5.1. A composición de simetrías e rotacións cumpre as seguintes propiedades:

- (a) A composición $f = f_2 \circ f_1$ de dúas simetrías especulares f_1 e f_2 con respecto aos planos Π_1 e Π_2 é unha translación se Π_1 e Π_2 son paralelos, e é unha rotación de eixe $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ e ángulo igual ao dobre do ángulo formado polos subespazos directores de Π_1 e Π_2 en caso contrario.

- (b) A composición de dúas rotacións é un movemento directo. Se os eixes r_1 e r_2 teñen un punto p en común, o eixe da composición pódese atopar da seguinte maneira: definimos $\pi = \langle r_1, r_2 \rangle$ e descompomos $f_1 = \sigma_\pi \circ \sigma_{\pi_1}$, $f_2 = \sigma_{\pi_2} \circ \sigma_\pi$, onde as σ son simetrías especulares. Entón, $f = f_2 \circ f_1 = \sigma_{\pi_2} \circ \sigma_{\pi_1}$ e o eixe de rotación de f é $\pi_1 \cap \pi_2$.

Demostración. (a) Supoñamos primeiro que os planos son paralelos, e collamos o sistema de coordenadas de xeito que o primeiro plano é o $z = 0$ e o segundo é o $z = a$, para algún $a \in \mathbb{R}$. Entón, a imaxe dun punto (x, y, z) pola primeira simetría é $(x, y, -z)$; e a imaxe deste punto pola segunda simetría é $(x, y, z + 2a)$. Polo tanto, a composición é unha translación na que o vector ten por dirección a perpendicular aos planos e por lonxitude o dobre da distancia entre eles.

Se os eixes non son paralelos, a intersección é unha recta. Podemos supor que a primeira simetría é con respecto ao plano $z = 0$ e a segunda con respecto a un plano que contén a recta $x = z = 0$ e forma un ángulo α co primeiro plano. Entón, un cálculo análogo ao realizado no caso de dimensión 2 mostra que o movemento resultante é un xiro de eixe $x = z = 0$ e ángulo 2α .

- (b) Como as rotacións son movementos directos, a súa composición tamén o é, xa que o determinante do produto é o produto de determinantes. Por outra banda, $f_1 = \sigma_\pi \circ \sigma_{\pi_1}$ xa que, polo visto antes, a intersección dos dous planos é o eixe da rotación e o ángulo de xiro depende do ángulo entre planos, sen importar cales sexan estes. Unha vez temos esas descomposicións,

$$f = f_2 \circ f_1 = \sigma_{\pi_2} \circ \sigma_\pi^2 \circ \sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2} \circ \sigma_{\pi_1},$$

xa que calquera simetría s cumpre que s^2 é a identidade. □

Proposición 3.5.2. Todo movemento de \mathbb{E}^3 pódese expresar como a composición de, como moito, 4 simetrías especulares.

Demostración. Analizaremos cada caso por separado. Se o movemento é a identidade ou unha simetría especular o resultado é evidente. No caso da rotación, consideramos dúas simetrías de xeito que os planos se corten no eixe de rotación e o ángulo sexa a metade do ángulo de rotación.

Para a composición da simetría especular e a rotación chegan 3 simetrías especulares: dúas para obter a rotación e unha máis para a simetría.

Para o caso das translacións, consideramos a composición de dúas simetrías especulares con planos paralelos, de xeito que o vector perpendicular aos planos e de módulo igual á distancia entre eles se corresponda coa metade do vector translación.

Para o caso da simetría especular esvaradía precisamos tamén de 3 simetrías especulares: dúas para obter a translación e unha máis para a simetría.

Finalmente, o único caso no que cómpren catro é para os movementos helicoidais: fan falta dúas para a rotación e dúas máis para a translación. □

Os resultados que traballamos en dimensión 2 e 3 sobre descomposición dun movemento en produto de simetrías pódense desenvolver nun contexto máis xeral. É o que se coñece como teorema de Cartan–Dieudonné; omitimos a demostración, aínda que as ideas son similares ás empregadas nestes casos.

Teorema 3.5.2 (Cartan–Dieudonné). Sexa E un espazo euclidiano de dimensión n . Entón, toda isometría se pode expresar como a composición de, como moito, n simetrías.

Dado que unha translación é composición de dúas simetrías, temos que todo movemento de \mathbb{E}^n é composición de, como moito, $n + 2$ simetrías. Nos casos de $n = 2, 3$, vimos que sempre era suficiente considerando $n + 1$.

Determinación de rotacións e simetrías

As dúas seguintes proposicións dannos fórmulas concretas para o cálculo de rotacións e simetrías, sen necesidade de traballar en forma matricial. Nese sentido, deben entenderse como resultados que permiten simplificar os cálculos.

Proposición 3.5.3. Sexa $r = p + \langle u \rangle$, con $\|u\| = 1$, e f a rotación de ángulo α e eixe r , orientado por u . Entón, para calquera $q \in \mathbb{E}^3$,

$$f(q) = p + v \cos \alpha + u \langle u, v \rangle (1 - \cos \alpha) + (u \times v) \sin \alpha,$$

onde $v = \mathbf{p}q$.

Demostración. Comezamos observando que podemos descompoñer o vector $v = \mathbf{p}q$ nunha compoñente paralela a u e noutra ortogonal. En concreto,

$$v = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \left(v - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right),$$

onde $w = v - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$ é ortogonal a u . Ademais, $u \times w = u \times v$. Polo tanto, collemos como referencia ortonormal $\{u, w, u \times v; p\}$, na cal, usando agora que $\|u\| = 1$,

$$q = p + \langle u, v \rangle u + w.$$

Polo tanto,

$$\begin{aligned} f(q) &= p + \langle u, v \rangle u + \cos \alpha w + (u \times v) \sin \alpha \\ &= p + \langle u, v \rangle u + \cos \alpha (v - \langle u, v \rangle u) + (u \times v) \sin \alpha \\ &= p + v \cos \alpha + u \langle u, v \rangle (1 - \cos \alpha) + (u \times v) \sin \alpha. \end{aligned}$$

□

Exemplo. Sexa f a rotación de eixe $p = (0, 0, 0) + \langle (0, 0, 1) \rangle$ e ángulo $\pi/3$. Entón, a imaxe do punto $(1, 0, 0)$ é

$$f(1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right).$$

Proposición 3.5.4. Sexa $\pi: p + \langle w \rangle^\perp$ e g a simetría especular respecto do plano π . Entón, para calquera $q \in \mathbb{E}^3$,

$$g(q) = q - 2 \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w,$$

onde $v = \mathbf{p}q$.

Demostración. Sexa $\{v_1, v_2\}$ unha base ortonormal de $\langle w \rangle^\perp$. Consideramos un sistema de referencia no espazo da forma $\{v_1, v_2, w; p\}$, e pomos $q = p + \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma w$. Finalmente, observamos que a proxección ortogonal de $v = q - p$ en $\langle w \rangle$ vén dada por $\frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$. Entón,

$$\begin{aligned} g(q) &= p + \alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma w \\ &= q - 2\gamma w \\ &= q - 2 \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w. \end{aligned}$$

□

Exemplo. Sexa f a simetría especular respecto ao plano $\pi: x + y + z = 0$; isto é, $\pi: (0, 0, 0) + \langle (1, 1, 1) \rangle^\perp$. Entón,

$$g(1, 0, 0) = (1, 0, 0) - 2 \cdot \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

3.6. Xeometría clásica

O estudo da xeometría vai inevitablemente ligado a certas cuestións clásicas, que poderíamos chamar *elementais*, relativas a figuras xeométricas como triángulos, cuadriláteros ou círculos. As nocións desenvolvidas ao longo destes temas permítenos entender mellor e desde unha perspectiva máis xeral algunhas destas cuestións, que comentamos ao longo desta sección, centrándonos principalmente nos chamados *puntos notables do triángulo*.

Proposición 3.6.1. As tres medianas dun triángulo son concorrentes. O punto de corte denomínase baricentro.

Demostración. Consideramos o sistema de referencia baricéntrico $\{A, B, C\}$, con $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Sexan A' , B' , C' as interseccións das medianas por A , B , C co lado oposto, respectivamente. Nesta referencia, temos $A' = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B' = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ e $C' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Se a razón simple $(A', B, C) = \lambda$, entón $A'C = \lambda A'B$, é dicir, $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \lambda(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, de onde se deduce $\lambda = -1$. De xeito análogo, podemos ver que $(A', B, C) = (B', C, A) = (C', A, B) = -1$, polo que $(A', B, C)(B', C, A)(C', A, B) = -1$ e o teorema de Ceva permítenos afirmar que as medianas son concorrentes.

Pasamos a calcular as coordenadas baricéntricas do seu punto de intersección. Así, a recta pasando por A e A' terá ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & x \\ 0 & 1/2 & y \\ 0 & 1/2 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z - y = 0.$$

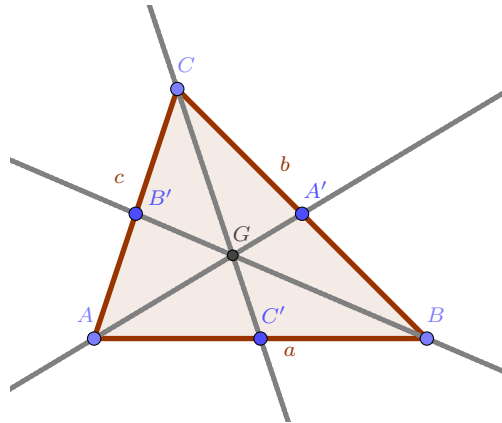
Analogamente, a mediana por B (recta que pasa por B e B') vén dada por:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1/2 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - z = 0,$$

e a ecuación da recta por C e C' é

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & x \\ 0 & 1/2 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Polo tanto, se (x, y, z) é o punto de intersección, ten que verificarse $x = y = z$ e $x + y + z = 1$. Concluimos que o baricentro ten coordenadas $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

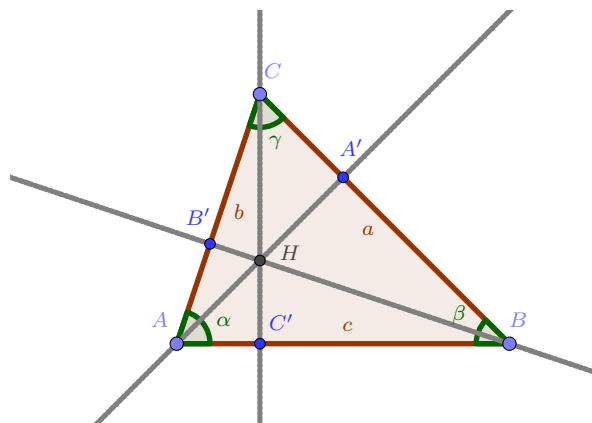


□

Mentres que as medianas son un concepto que se pode introducir no contexto da xeometría afín (dado que unicamente involucran a noción de razón simple), as *alturas* requiren da noción de ángulo, dado que son as rectas que pasan por un vértice e son perpendiculares ao lado oposto.

Proposición 3.6.2. As tres alturas dun triángulo son concorrentes. O punto de corte denomínase ortocentro.

Demostración. Consideramos os puntos A', B', C' de intersección das alturas dende os vértices A, B, C , respectivamente. Sexan tamén $\alpha = \angle CAB, \beta = \angle ABC$ e $\gamma = \angle ACB$ os ángulos que se forman en cada un dos vértices do triángulo.



Como as alturas forman un ángulo recto co lado oposto, temos as seguintes relacións trigonométricas:

$$|AB'| = b \cos \alpha, |B'B| = a \cos \beta, |AC'| = c \cos \alpha,$$

$$|C'C| = c \cos \gamma, |CA'| = b \cos \gamma, |A'B| = c \cos \beta.$$

Así, podemos calcular a razón simple (A', B, C) , que é o único $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $A'C = \lambda A'B$. Polo tanto, $(A', B, C) = -\frac{b \cos \gamma}{c \cos \beta}$. Ademais, tamén nos permite achar as coordenadas baricéntricas de A' , xa que

$$C - A' = \lambda(B - A'), \quad A' = \left(0, \frac{b \cos \gamma}{b \cos \gamma + c \cos \beta}, \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma + c \cos \beta} \right).$$

Analogamente, obtemos $(B', C, A) = -\frac{c \cos \alpha}{a \cos \gamma}$ e $(C', A, B) = -\frac{a \cos \beta}{b \cos \alpha}$. Logo,

$$B' = \left(\frac{a \cos \gamma}{a \cos \gamma + c \cos \alpha}, 0, \frac{c \cos \alpha}{a \cos \gamma + c \cos \alpha} \right),$$

$$C' = \left(0, \frac{a \cos \beta}{b \cos \alpha + a \cos \beta}, 0, \frac{b \cos \alpha}{b \cos \alpha + a \cos \beta} \right).$$

Como $(A', B, C)(B', C, A)(C', A, B) = -1$, o teorema de Ceva permítenos afirmar que as alturas do triángulo son concorrentes.

Para achar as súas coordenadas, podemos empregar que se P é un punto do interior do triángulo e $S = [ABC]$ é a superficie do mesmo, entón na referencia baricéntrica $\{A, B, C\}$, P ten coordenadas

$$P = \left(\frac{[BPC]}{S}, \frac{[CPA]}{S}, \frac{[APB]}{S} \right) \quad (3.1)$$

En primeiro lugar, temos que estas coordenadas están ben definidas, xa que $\frac{[BPC]}{S} + \frac{[CPA]}{S} + \frac{[APB]}{S} = 1$ (calculamos a área do triángulo ABC dividíndoo en tres subtriángulos que comparten o vértice P). Por outra parte, no sistema de referencia habitual $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0); (0, 0, 0)\}$, podemos escribir os puntos A, B, C como $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$. Ademais, a área do triángulo ABC vén dada por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Se temos un punto P no triángulo, con coordenadas (x, y, z) na referencia $\{A, B, C\}$, entón $P = xA + yB + zC$ e as coordenadas de P na referencia natural, serían $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (xa_1 + yb_1 + zc_1, xa_2 + yb_2 + zc_2, xa_3 + yb_3 + zc_3)$. Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Deste xeito, a área do triángulo de vértices P, Q, R con coordenadas na referencia $\{A, B, C\}$ dadas por $P = (x_1, x_2, x_3)$, $Q = (y_1, y_2, y_3)$, $R = (z_1, z_2, z_3)$ e $P = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $Q = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$, $R = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ na referencia natural coincide con

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$[PQR] = [ABC] \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Así, temos as seguintes igualdades (tomamos o valor absoluto dos determinantes por tratarse dunha superficie e P un punto no interior do triángulo),

$$[BPC] = [ABC] \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & y & 0 \\ 0 & z & 1 \end{vmatrix}, x = \frac{[BPC]}{[ABC]},$$

$$[CPA] = [ABC] \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix}, y = \frac{[CPA]}{[ABC]},$$

$$[APB] = [ABC] \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & z & 0 \end{vmatrix}, z = \frac{[APB]}{[ABC]}.$$

Desta maneira, podemos calcular as coordenadas do ortocentro $H = (x, y, z)$ na referencia $\{A, B, C\}$. A área do triángulo ABC coincide con $[ABC] = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2}$. Como $\angle BCH = \pi/2 - \beta$ temos que se h é a altura do triángulo BCH , empregando o teorema do seno para o triángulo $A'CH$,

$$\frac{b \cos \gamma}{\sin \beta} = \frac{h}{\sin(\pi/2 - \beta)} = \frac{h}{\cos(\beta)}.$$

Polo tanto, $h = \frac{b \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta}$. Así,

$$[BHC] = \frac{ah}{2} = \frac{ab \cos \gamma \cos \beta}{2 \sin \beta},$$

$$\frac{[BHC]}{[ABC]} = \frac{\frac{ab \cos \gamma \cos \beta}{2 \sin \beta}}{\frac{ab \sin \gamma}{2}} = \frac{\cos \gamma \cos \beta}{\sin \gamma \sin \beta}.$$

Seguindo razoamentos análogos, temos que

$$[AHC] = \frac{ab \cos \gamma \cos \beta}{2 \sin \alpha},$$

$$\frac{[AHC]}{[ABC]} = \frac{\frac{ab \cos \gamma \cos \alpha}{2 \sin \alpha}}{\frac{ab \sin \gamma}{2}} = \frac{\cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha},$$

$$[AHB] = \frac{bc \cos \alpha \cos \beta}{2 \sin \beta},$$

$$\frac{[AHB]}{[ABC]} = \frac{\frac{bc \cos \alpha \cos \beta}{2 \sin \beta}}{\frac{bc \sin \alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Polo tanto,

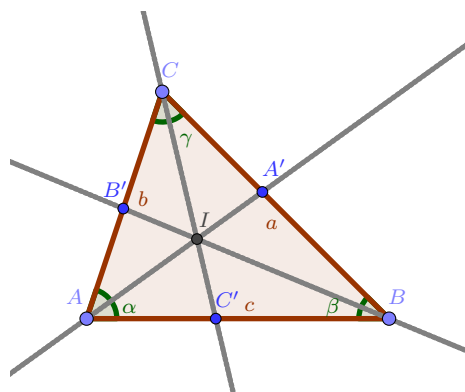
$$H = \left(\frac{\cos \gamma \cos \beta}{\sin \gamma \sin \beta}, \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}, \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right) = \left(\frac{1}{\tan \beta \tan \gamma}, \frac{1}{\tan \alpha \tan \gamma}, \frac{1}{\tan \alpha \tan \beta} \right).$$

□

Remarcamos o feito de que non estamos buscando dar demostracións sintéticas destes resultados, senón que o obxectivo é empregar as técnicas desenvolvidas ao longo do estudo da xeometría afín e euclidiana para interpretar estes resultados. Recordamos que a *bisectriz* dun ángulo é a recta que pasa por un vértice e que o biseca; de novo, é un concepto euclidiano xa que precisa da noción de ángulo.

Proposición 3.6.3. As tres bisectrices interiores dun triángulo son concorrentes. O punto de corte denomínase *incentro* e é o centro da circunferencia inscrita ao triángulo (é dicir, tanxente interiormente aos tres lados do triángulo).

Demostración. Denotando novamente por A', B', C' a intersección das bisectrices cos lados opostos correspondentes, temos a seguinte representación:



Se aplicamos o teorema do seno ao triángulo $AC'C$, temos que

$$\frac{|AC'|}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{|CC'|}{\sin \alpha}.$$

Analogamente, para o triángulo $BC'C$ obtemos

$$\frac{|CC'|}{\sin \beta} = \frac{|C'B|}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{c - |AC'|}{\sin \frac{\gamma}{2}},$$

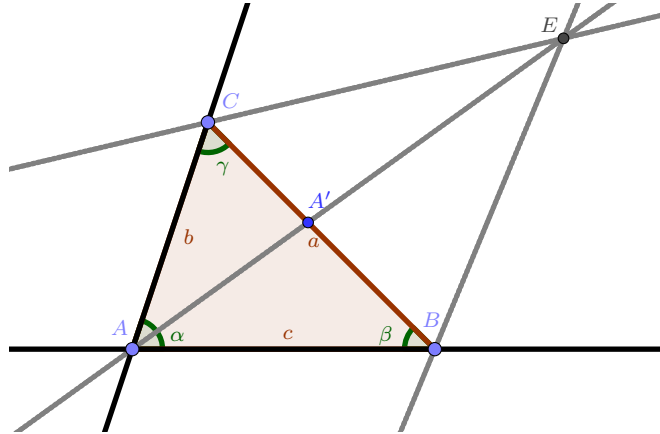
onde na última igualdade usamos que $|AC'| + |C'B| = c$. Estas dúas ecuacións permítenos obter $|AC'| = \frac{c \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$ e $|C'B| = c - |AC'| = \frac{c \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta}$. Logo, $(C', A, B) = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, e, dado que $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, $(C', A, B) = -\frac{a}{b}$. Ademais, con esta relación chegamos a $C' = (\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}, 0)$. Seguindo este mesmo proceso para A' e B' , obtemos $(B', C, A) = -\frac{c}{a}$, $(A', B, C) = -\frac{b}{c}$. Polo que, en virtude do teorema de Ceva, as bisectrices son concorrentes: $(A', B, C)(B', C, A)(C', A, B) = -1$.

Ademais, as razóns simples anteriores permítenos obter as coordenadas baricéntricas de A' e B' : $A' = (0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c})$, $B' = (\frac{a}{a+c}, 0, \frac{c}{a+c})$. Logo, a recta AA' ten ecuación $cy - bz = 0$, a recta BB' vén dada por $cx - az = 0$ e a ecuación de CC' é $bx - ay = 0$. Entón, o punto de intersección das bisectrices é $I = (\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c})$. \square

Nun triángulo tamén podemos considerar os *ángulos exteriores*, e nese caso falamos de *bisectrices exteriores*.

Proposición 3.6.4. Dúas bisectrices exteriores e a bisectriz interior do outro ángulo concorren. O punto de corte denomínase *excentro* e é o centro dunha das circunferencias exinscritas ao triángulo (é dicir, tanxentes interiormente a un lado e exteriormente aos outros dous). Falamos da *circunferencia exinscrita* correspondente ao vértice A cando é tanxente ao segmento BC e á prolongación dos outros dous lados.

Demostración. Consideramos a bisectriz interior por A e as bisectrices exteriores asociadas a B e C .



Sexa C' a intersección da bisectriz exterior pasando por C coa recta AB . Sexa B' a intersección da bisectriz exterior pasando por B coa recta AC . Sexa A' a intersección da bisectriz interior por A co lado BC . No apartado anterior, vimos que $(A', B, C) = -\frac{b}{c}$ e $A' = (0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c})$. Ademais, como $\angle BCE = \pi/2 - \gamma/2$, logo $\angle ACC' = \pi/2 - \gamma/2$. Por outra parte, o ángulo $\angle C'AC$ é suplementario de α e, como $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\angle C'AC = \beta + \gamma$. Así, $\angle AC'C = \pi - \angle ACC' - \angle CAC' = \pi/2 - \gamma/2 - \beta = (\pi/2 - \gamma/2 - \beta/2) - \beta/2 = (\alpha - \beta)/2$. Aplicando o teorema do seno no triángulo ACC' :

$$\frac{|C'A|}{\sin(\pi/2 - \gamma/2)} = \frac{b}{\sin((\alpha - \beta)/2)} \Rightarrow |C'A| = \frac{b \sin(\pi/2 - \gamma/2)}{\sin((\alpha - \beta)/2)},$$

e se agora o aplicamos ao triángulo BCC' :

$$\frac{|C'B|}{\sin(\pi/2 + \gamma/2)} = \frac{a}{\sin((\alpha - \beta)/2)} \Rightarrow |C'B| = |C'A| + c = \frac{a \sin(\pi/2 + \gamma/2)}{\sin((\alpha - \beta)/2)}.$$

Por tanto, como $(C', A, B) = \frac{|C'B|}{|C'A|}$, temos que $(C', A, B) = \frac{a \sin(\pi/2 + \gamma/2)}{b \sin(\pi/2 - \gamma/2)} = \frac{a \cos(\gamma/2)}{b \cos(-\gamma/2)} = \frac{a}{b}$ e $C' = (-\frac{a}{b-a}, \frac{b}{b-a}, 0)$.

Ese mesmo razoamento lévanos a $(B', C, A) = \frac{c}{a}$ e $B' = (\frac{a}{a-c}, 0, -\frac{c}{a-c})$. Entón,

$$(A', B, C)(B', C, A)(C', A, B) = -1$$

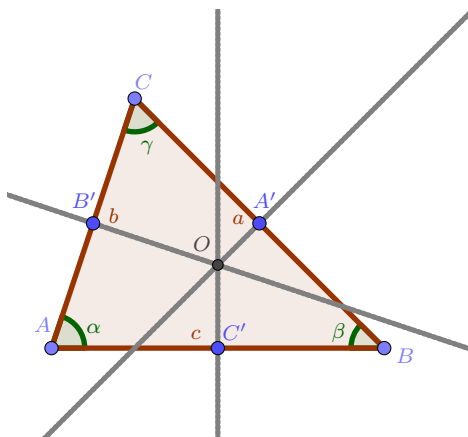
e as rectas son concorrentes polo teorema de Ceva.

O punto de intersección pertence ás rectas $cy - bz = 0$ (AA'), $cx + az = 0$ (BB') e $bx + ay = 0$ (CC'). Polo tanto, o excentro ten coordenadas $E = (\frac{-a}{b+c-a}, \frac{b}{b+c-a}, \frac{c}{b+c-a})$. \square

O último punto notable do que imos falar correspóndese co punto de corte das *mediatrices*, as rectas perpendiculares aos lados dun triángulo e que pasan polo seu punto medio.

Proposición 3.6.5. As tres mediatrices dun triángulo son concorrentes. O punto de corte denomínase *circuncentro* e é o centro da circunferencia circunscrita ao triángulo (é dicir, que contén os tres vértices do triángulo).

Demostración. Se A' , B' , C' son os puntos medios de BC , AC , AB respectivamente, estamos ante a seguinte situación:



En primeiro lugar, vexamos que se un punto pertence á mediatriz de AB , entón a súa distancia a A e a mesma que a súa distancia a B . En efecto, sexa P un punto nesta mediatriz e consideramos o triángulo APB . O triángulo $AC'P$ é un triángulo rectángulo de base $c/2$. O triángulo $BC'P$ tamén é rectángulo e de base $c/2$. Ademais, a altura dos dous triángulos é a mesma: $|C'P|$. Logo, as hipotenusas destes dous triángulos son iguais ($|AP| = |BP|$), isto é, a distancia de P a A coincide coa distancia de P a B , como queríamos ver.

A continuación, sexa O a intersección das mediatrizes dos lados AB e AC . Por estar na mediatriz de AB , temos que $|OA| = |OB|$. Como O tamén está na mediatriz de AC , $|OA| = |OC|$. Logo, $|OB| = |OC|$. Consideramos agora o triángulo BOC . Temos que é un triángulo isósceles, que ten polo tanto dous ángulos iguais: $\angle OBC = \angle OCB$. Logo, a altura deste triángulo pasa polo punto medio do lado BC (a altura polo vértice co ángulo desigual coincide coa bisectriz, a mediana e a mediatriz). É dicir, a recta que pasa por O e A' é perpendicular BC , polo tanto, coincide coa mediatriz deste lado. Concluimos que as tres mediatrizes se intersectan no punto O .

Para calcular as coordenadas do circuncentro, empregamos a expresión (1). Sexa $R = |OA| = |OB| = |OC|$ o raio da circunferencia circunscrita ao triángulo. No exercicio 5, probaremos que $R = \frac{abc}{4[ABC]}$ e, como $[ABC]$ podemos expresalo como $[ABC] = \frac{ab \sin \gamma}{2}$, temos que $R = \frac{c}{2 \sin \gamma}$. Polo teorema do seno:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Isto facilítanos o cálculo das áreas $[BOC]$, $[AOC]$, $[AOB]$. Por exemplo, para a primeira delas, temos que achar a área dun triángulo de base a e altura $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, onde usamos o teorema de Pitágoras para calcular esta altura. Así, como $R^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha}$,

$$[BOC] = \frac{a \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} = \frac{a^2}{4 \tan \alpha}.$$

Procedendo do mesmo xeito,

$$[AOC] = \frac{b^2}{4 \tan \beta},$$

$$[AOB] = \frac{c^2}{4 \tan \gamma}.$$

Axudándonos do teorema do coseno,

$$\begin{aligned}\frac{[BOC]}{[ABC]} &= \frac{\frac{a^2}{4 \tan \alpha}}{\frac{bc \sin \alpha}{2}} = \frac{a^2 \cos \alpha}{2bc \sin^2 \alpha} = \frac{a^2 \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2bc \sin^2 \alpha} = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16[ABC]^2}, \\ \frac{[COA]}{[ABC]} &= \frac{\frac{b^2}{4 \tan \beta}}{\frac{ac \sin \beta}{2}} = \frac{b^2 \cos \beta}{2ac \sin^2 \beta} = \frac{b^2 \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{2ac \sin^2 \beta} = \frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{16[ABC]^2}, \\ \frac{[APB]}{[ABC]} &= \frac{\frac{c^2}{4 \tan \gamma}}{\frac{ab \sin \gamma}{2}} = \frac{c^2 \cos \gamma}{2ab \sin^2 \gamma} = \frac{c^2 \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2ab \sin^2 \gamma} = \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16[ABC]^2}.\end{aligned}$$

Logo, o circuncentro ten coordenadas

$$O = \left(\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16[ABC]^2}, \frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{16[ABC]^2}, \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16[ABC]^2} \right)$$

□

Unha das propiedades máis coñecidas destes puntos notables, e sobre a que volveremos ao estudarmos as cónicas, é que o circuncentro, o baricentro e o ortocentro están aliñados. A recta que forman coñécese como *recta de Euler*.

Proposición 3.6.6. Demostrar que o ortocentro, o circuncentro e o baricentro dun triángulo están aliñados. A razón simple (H, O, G) é igual a $2/3$.

Demostración. Xa se acharon as coordenadas baricéntricas dos tres puntos. Sabemos que G, H, O están aliñados se, e soamente se,

$$\begin{vmatrix} 1/3 & \frac{1}{\tan \beta \tan \gamma} & \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16[ABC]^2} \\ 1/3 & \frac{1}{\tan \alpha \tan \gamma} & \frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{16[ABC]^2} \\ 1/3 & \frac{1}{\tan \alpha \tan \beta} & \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16[ABC]^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Esta condición equivalente a que

$$\begin{vmatrix} 1 & \tan \alpha & a^2(b^2+c^2-a^2) \\ 1 & \tan \beta & b^2(a^2+c^2-b^2) \\ 1 & \tan \gamma & c^2(a^2+b^2-c^2) \end{vmatrix} = 0,$$

pois se o determinante é nulo, podemos multiplicar as columnas ou filas por escalares non nulos sen que cambie o seu valor. Ademais, usando que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2bc \sin \alpha}{b^2+c^2-a^2} = \frac{4[ABC]}{b^2+c^2-a^2}$ e analogamente $\tan \beta = \frac{4[ABC]}{a^2+c^2-b^2}$, $\tan \gamma = \frac{4[ABC]}{a^2+b^2-c^2}$, basta probar que

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b^2+c^2-a^2} & a^2(b^2+c^2-a^2) \\ 1 & \frac{1}{a^2+c^2-b^2} & b^2(a^2+c^2-b^2) \\ 1 & \frac{1}{a^2+b^2-c^2} & c^2(a^2+b^2-c^2) \end{vmatrix} = 0.$$

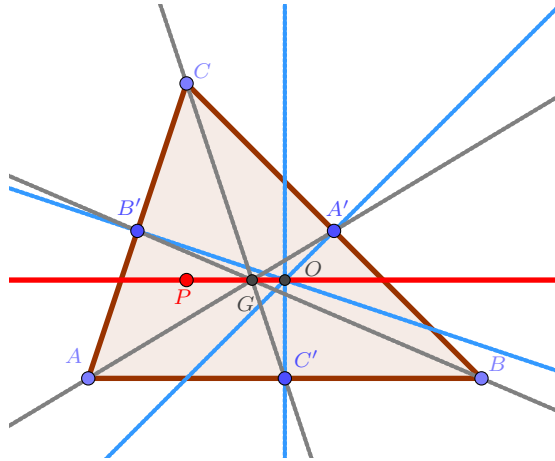
En efecto, desenvolvendo o determinante, obtemos

$$\frac{a^4 - c^4 + b^2c^2 - a^2b^2}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{-a^4 + b^4 + a^2c^2 - b^2c^2}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{-b^4 + c^4 + a^2b^2 - a^2c^2}{a^2 + c^2 - b^2} = 0.$$

Intentamos dar agora unha demostración alternativa sen utilizar coordenadas.

Consideramos, como no exercicio 2, A' punto medio do segmento BC , B' punto medio do segmento AC e C' o punto medio do segmento AB . O baricentro G , coincide coa intersección das rectas AA' , BB' e CC' (probamos no problema anterior que as medianas son concorrentes), e para o circuncentro O consideramos o punto no que se cortan as mediatrices (perpendiculares aos lados pasando polos puntos medios destes). Como G é o baricentro, G verifica que $|GA| = 2|GA'|$.

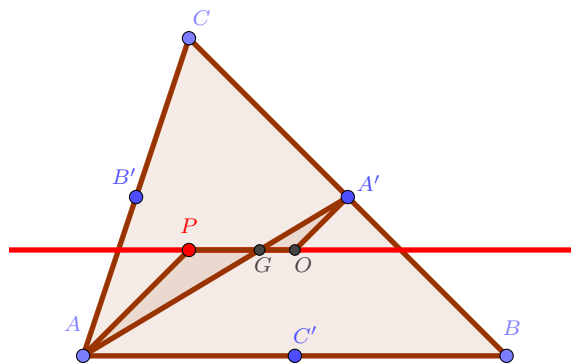
A continuación, consideramos a recta OG e sexa P o punto desta recta que verifica $|GP| = 2|GO|$ no sentido de \mathbf{OG} . Vexamos que P é o ortocentro do triángulo.



Consideramos os triángulos AGP e $A'GO$. Polo mencionado antes,

$$\frac{|GA|}{|GA'|} = \frac{|GP|}{|GO|} = 2.$$

Ademais, os ángulos $\angle PGA$ e $\angle OGA'$ (coinciden co ángulo entre as rectas PO e AA'). Deste xeito, os triángulos APG e $A'OG$ son semellantes e $\angle PAG = \angle OA'G$. Pola relación de semellanza entre os triángulos, as rectas AP e $A'O$ son paralelas, pero por ser O o circuncentro e A' o punto medio do lado BC , temos que a recta pasando por estes dous puntos é a mediatriz deste lado e polo tanto é perpendicular a BC . Como AP é paralela a unha recta perpendicular a BC , podemos afirmar que AP é tamén perpendicular a BC . Logo, AP coincide co altura do triángulo polo lado A .



Repetindo estes razoamentos para os triángulos BPG e $B'OG$, chegaríamos a que a recta BP coincide coa altura do triángulo dende o vértice B . Entón, P é o punto de intersección das alturas (no problema 2 vimos que eran concorrentes, e este punto de intersección denominámolo ortocentro) e está aliñado con O e G . Ademais, esta proba tamén nos mostra que, como $\frac{|GH|}{|GO|} = 2$, entón $(H, O, G) = 2/3$. \square

Proposición 3.6.7. Sexan D, E e F os puntos medios dos lados BC , CA e AB do triángulo ABC , e X, Y e Z os puntos medios das alturas desde A, B e C , respectivamente. As rectas DX, EY e FZ son concorrentes. O punto de intersección é o chamado *punto de Lemoine* ou *punto simediano*, e as rectas que o unen cos vértices do triángulo ABC son as *simedianas*.

Demostración. En primeiro lugar, establecemos as coordenadas dos puntos:

$$A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1);$$

$$D = (0, 1/2, 1/2), E = (1/2, 0, 1/2), F = (1/2, 1/2, 0);$$

$$X = \left(\frac{1}{2}, \frac{b \cos \gamma}{2(b \cos \gamma + c \cos \beta)}, \frac{c \cos \beta}{2(b \cos \gamma + c \cos \beta)} \right),$$

$$Y = \left(\frac{a \cos \gamma}{2(a \cos \gamma + c \cos \alpha)}, \frac{1}{2}, \frac{c \cos \alpha}{2(a \cos \gamma + c \cos \alpha)} \right),$$

$$Z = \left(\frac{a \cos \beta}{2(a \cos \beta + b \cos \alpha)}, \frac{b \cos \alpha}{2(a \cos \beta + b \cos \alpha)}, \frac{1}{2} \right).$$

A recta DX ten ecuación

$$\frac{c \cos \beta - b \cos \gamma}{b \cos \gamma + c \cos \beta} x + y - z = 0,$$

a recta EY está dada por

$$\frac{a \cos \gamma - c \cos \alpha}{a \cos \gamma + c \cos \alpha} y + z - x = 0,$$

e a ecuación da recta FZ é

$$\frac{b \cos \alpha - a \cos \beta}{b \cos \alpha + a \cos \beta} z + x - y = 0.$$

Resolvendo o sistema dado polas ecuacións das tres rectas, obtemos unha única solución, o punto

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ab \cos \gamma + ac \cos \beta}{ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha}, \frac{ab \cos \gamma + bc \cos \alpha}{ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha}, \frac{ac \cos \beta + bc \cos \alpha}{ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha} \right).$$

Polo tanto, as rectas son concorrentes e as coordenadas do simediano son as anteriores. \square

Proposición 3.6.8. Sexa ABC un triángulo. Sexa R o raio da circunferencia circunscrita do triángulo e sexa r o raio da circunferencia inscrita. Cúmrese que $R \geq 2r$ con igualdade se, e soamente se, o triángulo é equilátero

Demostración. Primeiro, comprobaremos a igualdade

$$S = rp,$$

onde $S = [ABC]$ é a superficie do triángulo ABC , r é o raio da circunferencia inscrita ao triángulo e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triángulo. Sexa I o incentro do triángulo, isto é, o centro da circunferencia inscrita ao triángulo. Temos que $S = [ABC] = [AIC] + [BIC] + [AIB]$. Ademais, a altura dos triángulos AIC , BIC e AIB é a mesma e coincide con r . Así,

$$S = [AIC] + [BIC] + [AIB] = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{cr}{2} = r \frac{a+b+c}{2} = rp.$$

Por outra banda, se denotamos por R o raio da circunferencia circunscrita ao triángulo ($R = |AO| = |BO| = |CO|$), temos que

$$abc = 4RS.$$

Para probar esta igualdade, consideramos a intersección da recta AO coa circunferencia e denotemos este punto por D . Temos que $\angle ADC = \angle ADB = \pi/2$. Sexa agora A' o punto de intersección da altura por A co lado BC . Temos que os triángulos ACD e $CA'A$ son semellantes, logo

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AA'|} \Leftrightarrow \frac{2R}{c} = \frac{b}{|AA'|} \Leftrightarrow \frac{2aR}{c} = \frac{ab}{|AA'|} \Leftrightarrow 2a|AA'| = \frac{abc}{R} \Leftrightarrow 4S = \frac{abc}{R} \Leftrightarrow 4RS = abc,$$

onde na penúltima igualdade usamos que $|AA'|$ é a altura do triángulo por A .

O último paso antes de probar a desigualdade inicial será ver a coñecida como fórmula de Herón:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Temos que $S = [ABC] = \frac{cb \sin \alpha}{2}$ e, usando $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ e $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{c^2 b^2 \sin^2 \alpha}{4} = \frac{c^2 b^2 (1 - \cos^2 \alpha)}{4} = \frac{c^2 b^2 (1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2 c^2})}{4}, \\ S^2 &= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2}{16}. \end{aligned}$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} p(p-a)(p-b)(p-c) &= \frac{a+b+c}{2} \frac{b+c-a}{2} \frac{a+c-b}{2} \frac{a+b-c}{2} \\ &= \frac{(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 + 2bc - c^2)}{16} \\ &= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2}{16}, \end{aligned}$$

de onde se segue a igualdade.

Finalmente, coas igualdades auxiliares anteriores, quédanos que probar

$$R \geq 2r,$$

é equivalente a ver

$$\frac{abc}{4S} \geq \frac{2S}{p},$$

ou, o que é o mesmo,

$$8S^2 \leq pabc,$$

que, empregando a fórmula de Herón dá lugar a

$$8 \frac{b+c-a}{2} \frac{a+c-b}{2} \frac{a+b-c}{2} \leq abc.$$

Pola desigualdade aritmético-geométrica, sabemos que

$$2\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \leq a+b-c+a+c-b = 2a,$$

$$2\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq a+b-c+b+c-a = 2b,$$

$$2\sqrt{(a+c-b)(b+c-a)} \leq a+c-b+b+c-a = 2c.$$

Logo, multiplicando as tres expresións anteriores, temos

$$\sqrt{(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2} \leq abc,$$

e, como a suma das lonxitudes dos lados dun triángulo é sempre maior que a lonxitude do lado restante, concluimos que

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc,$$

ou, equivalentemente,

$$R \geq 2r.$$

Canto á igualdade, se $R = 2r$, entón

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = abc.$$

Nese caso, teremos

$$2\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} = 2a,$$

$$2\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} = 2b,$$

$$2\sqrt{(a+c-b)(b+c-a)} = 2c.$$

Se $x, y \in \mathbb{R}$ verifican $x+y = 2\sqrt{xy}$, entón

$$(x+y)^2 = 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0,$$

polo que $x = y$. Así, no noso caso obtemos

$$a+b-c = a+c-b = b+c-a,$$

é dicir, $a = b = c$ e estamos ante un triángulo equilátero. □

3.7. Problemas

Distancias, ángulos e volumes.

Problema 3.1. Dados tres puntos calquera A, B, C dun espazo afín euclidiano, demostrar que

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(C, B)^2 + 2\langle \mathbf{AC}, \mathbf{CB} \rangle.$$

Deducir o *teorema do coseno* para triángulos arbitrarios e o *teorema de Pitágoras* para triángulos rectángulos.

Solución. Temos que

$$\begin{aligned} d(A, B)^2 &= \langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle \\ &= \langle \mathbf{AC} + \mathbf{CB}, \mathbf{AC} + \mathbf{CB} \rangle \\ &= \langle \mathbf{AC}, \mathbf{AC} \rangle \langle \mathbf{CB}, \mathbf{CB} \rangle + 2\langle \mathbf{AC}, \mathbf{CB} \rangle \\ &= d(A, C)^2 + d(C, B)^2 + 2\langle \mathbf{AC}, \mathbf{CB} \rangle. \end{aligned}$$

Se ABC é un triángulo e pomos a, b e c para as lonxitudes dos lados BC, CA e AB , respectivamente, temos que

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\angle BCA),$$

onde empregamos que $\langle \mathbf{AC}, \mathbf{CB} \rangle = \|\mathbf{AC}\| \cdot \|\mathbf{CB}\| \cdot \cos(\angle BCA)$. Isto é o que se coñece como teorema do coseno.

Se o triángulo é rectángulo, temos que $\angle BCA = \pi/2$, polo que a igualdade anterior escríbese como $c^2 = a^2 + b^2$ (teorema de Pitágoras).

Problema 3.2. Se $ABCD$ é un cuadrilátero calquera dun espazo afín euclidiano e M e N son os puntos medios das diagonais, demostrar que

$$d(A, B)^2 + d(B, C)^2 + d(C, D)^2 + d(D, A)^2 = d(A, C)^2 + d(B, D)^2 + 4d(M, N)^2.$$

Deducir a *lei do paralelogramo*: a suma dos cadrados dos catro lados de calquera paralelogramo é igual á suma dos cadrados das súas diagonais.

Solución. Temos que

$$\begin{aligned} 4d(M, N)^2 &= 4\|N - M\|^2 \\ &= \|A + C - B - D\|^2 \\ &= \|A - B\|^2 + \|C - D\|^2 + 2\langle A - B, C - D \rangle \\ &= d(A, B)^2 + d(C, D)^2 + 2\langle \mathbf{AB}, \mathbf{CD} \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, empregando o exercicio anterior

$$\begin{aligned} d(A, C)^2 &= d(A, B)^2 + d(B, C)^2 + 2\langle \mathbf{AB}, \mathbf{BC} \rangle, \\ d(B, D)^2 &= d(A, B)^2 + d(A, D)^2 + 2\langle \mathbf{BA}, \mathbf{AD} \rangle \end{aligned}$$

Polo tanto, sumando as tres igualdades, o resultado a demostrar é equivalente a

$$\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} + \mathbf{CD} + \mathbf{BC} - \mathbf{AD} \rangle = 0.$$

Iso é inmediato a partir do feito de que

$$\mathbf{AB} + \mathbf{CD} + \mathbf{BC} - \mathbf{AD} = \mathbf{AC} + \mathbf{CD} - \mathbf{AD} = \mathbf{AD} - \mathbf{AD} = 0.$$

No caso dos paralelogramos, as diagonais córtanse nos respectivos puntos medios, polo que $M = N$ e $d(M, N) = 0$.

Problema 3.3. Sexan r e r' dúas rectas que se cruzan nun espazo afín de dimensión tres.

- (a) Demostrar que existe unha única recta s que corta ás dúas e que é ao mesmo tempo perpendicular a r e a r' . Esta recta chámase *perpendicular común* de r e r' .
- (b) É certo o resultado anterior nun espazo afín euclidiano de dimensión $n \geq 4$.
- (c) Calcular a perpendicular común ás rectas r e r' que teñen por ecuacións

$$r: \begin{cases} x - y = -1 \\ z = -6 \end{cases} \quad r': \begin{cases} x = 1 \\ 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Solución. (a) Sexan v_1 e v_2 os vectores directores das rectas. Polo tanto, $r: a + \langle v_1 \rangle$ e $s: b + \langle v_2 \rangle$. Queremos atopar unha recta t de xeito que interseque a r e s en puntos p e q , respectivamente, e que teña vector director perpendicular a ambas. Escribimos entón $p = a + \lambda v_1$ e $q = b + \mu v_2$. A recta que pasa por p e q é perpendicular a r e a s , polo que

$$q - p = b - a + \mu v_2 - \lambda v_1 \in (F + G)^\perp.$$

Ao mesmo tempo, $q - p \in r \vee s$, que ten dimensión 3, e podemos escribir $r \vee s = a + \langle v_1, v_2, w \rangle$, con $w \in (F + G)^\perp$, xa que podemos completar $\langle v_1, v_2 \rangle$ a unha base de todo o espazo. Ao proxectar $q - p$ a $(F + G)^\perp$, temos que $\mu v_2 - \lambda v_1$ anuláanse xa que están en $(F + G)$. Descompoñendo $b - a = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma w$, temos que $\lambda = \alpha$ e $\mu = -\beta$, polo que existe unha solución, e só unha, que cumpra a condición.

- (b) No argumento anterior non se empregou en ningún momento a condición de que a dimensión do espazo fose 3, polo tanto o razoamento é análogo.
- (c) Os subespazos directores F e G das rectas r e r' son $\langle (1, 1, 0) \rangle$ e $\langle (0, -2, 3) \rangle$ respectivamente. Polo tanto, $(F + G)^\perp = \langle (-3, 3, 2) \rangle$. Se escribimos $p = (0, 1, -6) + \lambda(1, 1, 0)$ e $q = (1, 4, 2) + \mu(0, -2, 3)$, impomos que

$$q - p = (1, 3, 8) + \mu(0, -2, 3) - \lambda(1, 1, 0) \in (F + G)^\perp.$$

Polo tanto, proxectando $q - p$ a $(F + G)^\perp$, o único que nos interesa é a imaxe de $(1, 3, 8)$, xa que os outros dous sumandos pertencen a $(F + G)$. Escribimos logo

$$(1, 3, 8) = w + \nu(-3, 3, 2),$$

con $w \in (F + G)$. Facendo o produto escalar a cada lado por $(-3, 3, 2)$, temos que $\nu = \frac{22}{22} = 1$ e $w = (4, 0, 6) = 4 \cdot (1, 1, 0) + 2 \cdot (0, -2, 3)$. Entón, $\lambda = 4$ e $\mu = -2$.

Polo tanto, a perpendicular común é a que recta que pasa por $p = (4, 5, -6)$ e $q = (1, 8, -4)$, e que polo tanto ten vector director $(0, -2, 3)$.

Problema 3.4. En \mathbb{E}^4 , considéranse os planos π_1 e π_2 que teñen por ecuacións na referencia natural

$$\pi_1: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 2 + \mu \\ u = 2 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$\pi_2: \begin{cases} x - 2u = 0 \\ x + 2y - az = 1, \end{cases}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Calcular a distancia de π_1 a π_2 en función de a .

Solución. Pomos $\pi_1: p + F$ e $\pi_2: q + G$, con

$$F = \langle (1, -2, 0, 0), (1, 1, 1, 0) \rangle, \quad G = (0, a, 2, 0), (2, -1, 0, 1) \rangle.$$

Se $\dim(F + G) = 4$, entón $\mathbf{pq} \in F + G$, o que quere dicir que $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, polo que $d(\pi_1, \pi_2) = 0$. Un cálculo rutineiro amosa que se $a \neq 6$, entón $\dim(F + G) = 4$. Polo tanto, se $a \neq 6$ tense que $d(\pi_1, \pi_2) = 0$.

Se $a = 6$, pomos $p = (1, 0, 2, 2)$ e $q = (1, 0, 0, 1/2)$, polo que $\mathbf{pq} = (0, 0, -2, -3/2)$. O vector \mathbf{pq} pode escribirse como $\mathbf{pq} = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in F + G$ e $v_2 \in (F + G)^\perp$. Entón, $d(\pi_1, \pi_2) = \|v_2\|$. Neste caso, $(F + G)^\perp = \langle (2, 1, -3, -3) \rangle$, polo que $v_2 = \lambda(2, 1, -3, -3)$. En particular, facendo o produto escalar por $(2, 1, -3, -3)$ temos que

$$\langle \mathbf{pq}, (2, 1, -3, -3) \rangle = \lambda \langle (2, 1, -3, -3), (2, 1, -3, -3) \rangle.$$

De aquí deducimos que $\lambda = 21/46$ e

$$d(\pi_1, \pi_2) = \|v_2\| = \frac{21}{46} \sqrt{23}.$$

Problema 3.5. En \mathbb{E}^4 , atopar a distancia entre a recta

$$r: (1, 0, 0, 1) + \langle (1, 0, 1, -1) \rangle$$

e o plano

$$\Pi: (0, 0, 0, 1) + \langle (2, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0) \rangle.$$

Solución. Sexa $F = \langle (1, 0, 1, -1) \rangle$ e $G = \langle (2, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0) \rangle$. Temos que $F + G$ ten dimensión 3 e

$$(F + G)^\perp = \langle (1, -2, 2, 3) \rangle.$$

Se $p = (1, 0, 0, 1)$ e $q = (0, 0, 0, 1)$, escribimos $\mathbf{qp} = u + v$, onde $u \in F + G$ e $v \in (F + G)^\perp$. En particular, $v = \lambda(1, -2, 2, 3)$. Para achar λ , facemos o produto escalar a ambos lados por $(1, -2, 2, 3)$ e obtemos que

$$\lambda = \frac{\langle (1, 0, 0, 0), (1, -2, 2, 3) \rangle}{\|(1, -2, 2, 3)\|^2} = \frac{1}{18}.$$

Finalmente, temos que

$$d(r, \Pi) = |\lambda| \cdot \|(1, -2, 2, 3)\| = \frac{\sqrt{18}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Problema 3.6. Consideramos as variedades lineais de \mathbb{E}^4 dadas, en referencia ordinaria, por

$$V: x + y + z + t + 1 = x + z = 0, \quad W: y + t = x + y - 1 = 0.$$

Estudar a súa posición relativa e calcular $d(V, W)$.

Solución. Sexan F e G os subespazos directores de V e W , respectivamente. Entón,

$$V = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1) \rangle, \quad W = \langle (0, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 1) \rangle.$$

Como $V \cap W = \langle(1, -1, 1, -1)\rangle$ ten dimensión 1, estamos na situación do exercicio anterior e os planos crúzanse. Tense ademais que $(F + G)^\perp = \langle(0, 1, 0, 1)\rangle$. Un punto de paso de V é, por exemplo, $p = (0, -1, 0, 0)$, e un de W é o $q = (0, 1, 0, 0)$. Polo tanto, $\mathbf{pq} = (0, 2, 0, 0) = v_1 + v_2$, con $v_1 \in F + G$ e $v_2 \in (F + G)^\perp$. Entón, $v_2 = \lambda(0, 1, 0, 1)$ e temos que

$$\lambda = \frac{2}{2} = 1.$$

Polo tanto, $\|v_2\| = \sqrt{2}$.

Problema 3.7. En \mathbb{E}^3 , coa referencia $\bar{\mathcal{R}} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0); (1, 0, 0)\}$, consideramos o plano $\pi: \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 1$ e o punto $p = (0, 1, 1)_{\bar{\mathcal{R}}}$. Calcular $d(p, \pi)$.

Solución. A matriz do produto escalar na base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Polo tanto, a perpendicular ao plano que pasa por p ten vector director (a, b, c) , que cumpre que

$$\langle(a, b, c), (1, -1, 0)\rangle = a = 0, \quad \langle(a, b, c), (1, 0, -1)\rangle = 2a + b = 0.$$

Polo tanto, a recta é $(0, 1, 1) + \langle(0, 0, 1)\rangle$. O corte co plano π é o $(0, 1, 0)$. Finalmente, só queda calcular a norma do vector diferenza, isto é, o $(0, 0, 1)$ (operando coa matriz do produto escalar); obtense entón que a distancia é 1.

Problema 3.8. En \mathbb{E}^3 , consideramos o plano $\pi: x + y + z = 0$ e a recta $r = \{(1, 0, 0 + t(1, -1, 0))\}$. Sexa $\bar{\mathcal{R}}$ un sistema de referencia ortonormal no que $\pi: \bar{z} = 0$ e $r = \{\bar{x} = 0, \bar{z} = b\}$, con $b \neq 0$. Atopar as condicións que ten que cumprir b e a referencia $\bar{\mathcal{R}} = \{v_1, v_2, v_3; Q\}$. Cantos sistemas de referencia ortonormais hai que cumpran estas condicións?

Solución. Comezamos observando que o vector $(1, -1, 0)$ pertence ao subespazo director de π , e como $(1, 0, 0) \notin \pi$, a recta e o plano son paralelos e a distancia entre eles é $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Como estamos comparando dous sistemas de referencia ortonormais, a distancia de π a r é a mesma en ambos sistemas. No segundo sistema, a referencia é $|b|$, polo que $b = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Agora, facemos as seguintes observacións:

- Un vector unitario normal ao plano, o $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ vai ao $\pm(0, 0, 1)$. Polo tanto, $v_3 = \pm(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.
- Un vector unitario director da recta, o $(1, -1, 0)$, vai ao $\pm(0, 1, 0)$. Polo tanto, $v_2 = \pm(1, -1, 0)$.
- Un vector unitario normal aos dous anterior, o $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$, vai a un unitario normal aos outros dous, o $\pm(1, 0, 0)$. Polo tanto, $v_1 = \pm(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$.

Polo tanto, hai oito opcións posibles para a parte lineal. A orixe de coordenadas pertence ao plano π , polo que a súa coordenada z é 0. É dicir, Q pode ser calquera punto da forma $(q_1, q_2, 0)$.

Problema 3.9. Sexan r e s dúas rectas perpendiculares de \mathbb{E}^3 que se cruzan, A o punto medio do segmento definido polos puntos de r e s que minimizan a distancia entre r e s , $B \in r$ e $C \in s$ de xeito que $d(A, B) = d(A, C)$, $d(B, C) = \sqrt{2}d(r, s)$. Sabendo que a área do triángulo ABC é $\sqrt{2}$, determinar $d(r, s)$.

Solución. Escollemos un sistema de referencia ortonormal do seguinte xeito. A recta r correspóndese con $a = 0$ e a recta s , con $x = 0, z = b$; isto é, ten vector director $(0, 1, 0)$. Nese caso, os puntos de cruce son o $(0, 0, 0)$ e o $(0, 0, b)$. Polo tanto, $A = (0, 0, b/2)$, $B = (-t, 0, 0)$ e $C = (0, t, b)$. Como se cumpre ademais que

$$2b^2 = (\sqrt{2}d(r, s))^2 = d(B, C)^2 = 2t^2 + b^2,$$

de onde se deduce que $t = \pm\sqrt{2}/2$. Como o cálculo é análogo nas dúas situacións, imos supoñer que $t = \sqrt{2}/2$. Entón,

$$\mathbf{AB} = \left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{b}{2}\right), \quad \mathbf{AC} = \left(0, \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2}\right).$$

Observamos que

$$\begin{vmatrix} \frac{3b^2}{4} & -\frac{b^2}{4} \\ -\frac{b^2}{4} & \frac{3b^2}{4} \end{vmatrix} = \frac{b^2}{2}.$$

Polo tanto, pondo $\frac{|b|}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, obtemos que $|b| = 4$. Polo tanto, a distancia entre as dúas rectas é 4.

Problema 3.10. Sexa ABC un triángulo nun plano afín euclidiano e A', B', C' os puntos definidos por

$$\mathbf{AC}' = \frac{2}{3}\mathbf{AB}, \quad \mathbf{BA}' = \frac{2}{3}\mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}' = \frac{2}{3}\mathbf{CA}.$$

As tres rectas AA', BB' e CC' determinan un triángulo $A''B''C''$ no interior do triángulo orixinal. Calcular a área do triángulo en termos da área de ABC .

Solución. Consideramos a referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}; A\}$, que non é necesariamente ortonormal. Entón, $A' = (4/7, 1/7)$, $B' = (2/7, 4/7)$ e $C' = (1/7, 2/7)$. Consideramos agora os vectores $\mathbf{C}'\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'\mathbf{A}'$ e calculamos o seu determinante de Gram. Para iso, partimos de que a matriz do produto escalar asociada a $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})$ é

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad ac - b^2 > 0.$$

Entón, temos que

$$G(\mathbf{A}'\mathbf{B}', \mathbf{A}'\mathbf{C}') = \frac{1}{7^4} \begin{vmatrix} a + 4b + 4c & 3a + 5b - 2c \\ 3a + 5b - 2c & 9a - 6b + c \end{vmatrix} = \frac{ac - b^2}{49}.$$

Por outro lado,

$$G(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = ac - b^2.$$

Polo tanto, a área do triángulo coincide coa de ABC multiplicada polo factor $1/7$.

Problema 3.11. Sexa $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ a homoloxía xeral do plano que ten por eixe a recta $x + y + 1 = 0$ que deixa invariantes as rectas $P + \langle(0, 1)\rangle$, con P un punto calquera, e de razón $\alpha = 2$. Se ABC é o triángulo de vértices $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$ e $C = (4, 2)$, calcular a área do triángulo imaxe $f(A)f(B)f(C)$.

Solución. A matriz da homoloxía na base canónica vén dada por

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Polo tanto, $f(A) = (1, 6)$, $f(B) = (2, 9)$ e $f(C) = (4, 9)$. Para calcular a área, escollemos o lado $f(A)f(B)$ como base; a súa lonxitude é $\sqrt{10}$. Para a altura, hai que calcular a distancia do punto $f(C)$ á recta $f(A)f(B)$, que ten ecuación

$$3x - y + 3 = 0.$$

Tense que $d(f(C), f(A)f(B)) = \frac{6}{\sqrt{10}}$. Por conseguinte, a área do triángulo é 3.

Problema 3.12. Sexa $ABCD$ un tetraedro calquera dun espazo afín tridimensional. Demostrar que os seis planos mediatrices das arestas $ABCD$ concorren nun punto.

Solución. Fixamos un sistema de referencia ortonormal con orixe en $A = (0, 0, 0)$ e de xeito que o eixe $x = 0$ coincida coa recta $A \vee B$ e $A \vee B \vee C$ co plano. Sexa entón $B = (b, 0, 0)$, $C = (c_1, c_2, 0)$ e $D = (d_1, d_2, d_3)$. Consideramos a intersección dos planos que pasan polos puntos medios dos lados AB , AC e AD e son perpendiculares a eles. Obtemos entón o sistema

$$\begin{aligned} 2x &= c_1 + d_1 \\ 2c_1x + 2c_2y &= c_1(b + d_1) + c_2d_2 \\ 2d_1x + 2d_2y + 2d_3z &= d_1(b + c_1) + c_2d_2. \end{aligned}$$

O sistema ten unha única solución, que é o punto

$$\mathcal{O} = \left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_1(b - c_1) + c_2d_2}{2c_2}, \frac{c_1d_2(c_1 - b) + c_2(bd_1 + c_2d_2 - d_1^2 - d_2^2)}{2c_2d_3} \right).$$

É sinxelo comprobar que este punto pertence aos outros tres planos.

Movimentos no plano e no espazo.

Problema 3.13. Atopar as ecuacións dos seguintes movementos $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ e determinar os seus elementos característicos:

- (a) f é un xiro tal que $f(1, 1) = (-1, 3)$ e $f(2, 0) = (0, 4)$.
- (b) f é unha simetría axial tal que $f(2, 3) = (1, 1)$.

Solución. (a) O centro do xiro está á mesma distancia de $(1, 1)$ e de $(-1, 3)$, e tamén á mesma distancia de $(2, 0)$ e de $(0, 4)$. Polo tanto, calculamos as mediatrices dos segmentos que unen ambos pares de puntos; observamos que a mediatriz é a recta que pasa polo punto medio dos puntos e ten como vector director un vector perpendicular á recta que une os puntos. Polo tanto, o centro do xiro é a intersección de

$$y = 2 + x \quad \text{e} \quad y = 2 + \frac{1}{2}(x - 1).$$

Resolvendo o sistema, vemos que o centro é $\mathcal{O} = (-1, 1)$. Para achar o ángulo α , temos que

$$\cos \alpha = \frac{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}{\|(2, 0)\| \cdot \|(0, 2)\|} = 0.$$

Polo tanto, $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. É inmediato comprobar que o xiro é en sentido antihorario, polo que $\alpha = \frac{\pi}{2}$; alternatively, para calquera vector non nulo v cúmprese que $\det(v, \tilde{f}(v)) > 0$.

Finalmente, observamos que $f(0, 0) = (0, 2)$, polo que a matriz do xiro na referencia canónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

(b) O eixe da simetría é a mediatriz do segmento que une os dous puntos, isto é,

$$r: y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{4}.$$

Para achar a matriz, podemos calcular primeiro a imaxe da orixe, e tense que $f(0, 0) = (11/5, 22/5)$. Por outra banda, para a aplicación lineal, temos que

$$\tilde{f}(1, 2) = (-1, -2), \quad \tilde{f}(-2, 1) = (-2, 1),$$

polo que

$$\tilde{f}(1, 0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \quad \tilde{f}(0, 1) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Concluimos que a matriz da simetría na referencia canónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3/5 & -4/5 & 11/5 \\ -4/5 & -3/5 & 22/5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Problema 3.14. Atopar o lugar xeométrico das imaxes do punto $(1, 1)$ de \mathbb{E}^2 por tódalas rotacións de ángulo $\pi/2$ e centro un punto calquera da recta $x + y = 1$.

Solución. Sexa $P_a = (a, 1 - a)$ un punto xenérico da recta $x + y = 1$. Un xiro de centro P_a e ángulo $\pi/2$ envía o punto $(1, 1)$ a un punto sobre a recta perpendicular ao segmento que une P_a con $(1, 1)$ e que pasa por $(a, 1 - a)$. Na súa forma explícita, a recta exprésase como

$$x = a + t(1 - a), \quad y = 1 - a - at, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O resultado do xiro é un punto que está á mesma distancia de P_a que o punto $(1, 1)$, isto é

$$t^2(1 - a)^2 + t^2a^2 = (1 - a)^2 + a^2,$$

de onde se ten que $t = \pm 1$. Unha comprobación rutineira amosa que o xiro correspondente a un ángulo de $\pi/2$ dáse cando $t = 1$, mentres que $t = -1$ corresponde a un xiro de ángulo $3\pi/2$. Polo tanto, a imaxe de $(1, 1)$ polo xiro é o punto $(1, 1 - 2a)$.

Cando a varía, os puntos sempre se atopan na recta $x = 1$, mentres que a coordenada y pode tomar calquera valor, xa que $1 - 2a$, visto como función de variable real, é bixectiva. Polo tanto, a imaxe é a recta vertical $x = 1$.

Problema 3.15. Dadas dúas circunferencias \mathcal{C} e \mathcal{C}' do plano afín euclidiano, atopar todas as homotecias que transforman unha na outra.

Solución. Supoñamos primeiro que os radios R e R' son diferentes. Consideramos en primeiro lugar unha translación que leve o centro \mathcal{O} de \mathcal{C} no centro \mathcal{O}' de \mathcal{C}' . Se os centros coinciden, este é o centro e único punto fixo da homotecia. É inmediato entón que as homotecias posibles teñen ese centro e razón $\pm R'/R$.

Consideremos un sistema de referencia no que $\mathcal{O} = (0, 0)$ e $\mathcal{O}' = (d, 0)$. Entón, a matriz da homotecia é

$$\left(\begin{array}{cc|c} \pm R'/R & 0 & d \\ 0 & \pm R'/R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

O centro da homotecia é o único punto fixo, que se corresponde co $\left(\frac{Rd}{R \mp R'}, 0 \right)$.

Cando os radios son iguais, o razoamento é análogo, salvo que a homotecia de razón $R'/R = 1$ correspóndese cunha translación, polo que unicamente temos unha homotecia, que é a de razón -1 .

Problema 3.16. Sexa \mathcal{C} a circunferencia de radio 1 centrada na orixe do plano afín euclidiano \mathbb{E}^2 e ABC o triángulo de vértices $A = (5, 0)$, $B = (3, 2)$ e $C = (2, \sqrt{3})$.

- Atopar un punto O que estea á mesma distancia de A , B e C .
- Dar as ecuacións e o centro da homotecia de razón positiva que transforma a circunferencia de centro O e radio OA en \mathcal{C} .
- Atopar un triángulo $A'B'C'$ inscrito en \mathcal{C} de xeito que os seus lados sexan paralelos aos lados correspondentes de ABC .

Solución. (a) O único punto que cumpre esas condicións é a intersección das mediatrices de AB , BC e CA , isto é, o $(3, 0)$.

- Trátase dunha homotecia que envía o punto $(3, 0)$ á orixe e de razón $1/2$. Polo tanto, o centro da homotecia é o $(-3, 0)$ e a imaxe do $(0, 0)$ é o $(-3/2, 0)$. Polo tanto, a homotecia buscada é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- É suficiente con achar as imaxes dos vértices do triángulo ABC pola homotecia do apartado anterior, xa que esta preserva os paralelismos. En particular, $A' = (1, 0)$, $B' = (0, 1)$ e $C' = (-1/2, \sqrt{3}/2)$.

Problema 3.17. Sexan \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 tres circunferencias de xeito que os seus centros non estean aliñados. Sexan I_1 , I_2 e I_3 os centros das homotecias de razón positiva que transforman \mathcal{C}_2 en \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_3 en \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_1 en \mathcal{C}_2 , respectivamente. Demostrar que I_1 , I_2 e I_3 están aliñados.

Solución. Sexan \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 e \mathcal{O}_3 os centros das tres circunferencias. Do exercicio anterior temos que I_3 está na recta que pasa por \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 e cúmprese ademais que

$$(I_3, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \frac{\frac{R_2 d}{R_1 - R_2}}{\frac{R_1 d}{R_1 - R_2}} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Polo tanto,

$$(I_3, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)(I_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3)(I_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_1) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_3} = 1,$$

polo que aplicando o teorema de Menelao no triángulo $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3$ cos puntos I_1, I_2 e I_3 , temos que estes están aliñados.

Problema 3.18. Comprobar que as seguintes afinidades de \mathbb{E}^3 definidas na referencia natural son movementos, clasificalos e atopar os seus elementos característicos, a ecuación reducida e unha referencia adaptada.

$$(a) \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$(b) \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 4/9 & 4/9 & -7/9 & 0 \\ -1/9 & 8/9 & 4/9 & 0 \\ -8/9 & 1/9 & -4/9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$(c) \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3/5 & 0 & -4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$(d) \quad D = \left(\begin{array}{ccc|c} 4/9 & 4/9 & -7/9 & 1 \\ -1/9 & 8/9 & 4/9 & 2 \\ -8/9 & 1/9 & -4/9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Solución. Todas elas son movementos, xa que a parte lineal é unha isometría; é dicir, cúmprese que $AA^t = \mathbb{I}_3$, e analogamente para o resto de matrices.

- (a) A variedade de puntos fixos é a recta $r: (0, 0, 0) + \langle (1, 0, 1) \rangle$, polo que se trata dunha rotación en torno a ese eixe. Para atopar o ángulo de xiro α , impomos $1 + 2 \cos \alpha = \text{Tr}(\tilde{A}) = 5/3$, polo que $\cos \alpha = 1/3$. Para saber se o ángulo é positivo ou negativo, collemos un vector arbitrario, por exemplo o $(1, 0, 0)$, calculamos $\tilde{A} \cdot (1, 0, 0) = (2/3, -2/3, 1/3)$ e finalmente facemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} < 0.$$

Polo tanto, o ángulo é $\alpha = -\arccos(1/3)$.

- (b) A variedade lineal de puntos fixos é o punto $(0, 0, 0)$, polo que se trata da composición dunha simetría especular e dun xiro en torno a un eixe perpendicular ao plano. Para atopar o eixe, achamos un vector propio de valor propio -1 , por exemplo o $(3, -1, 5)$. Entón, o eixe é $r: (0, 0, 0) + \langle (3, -1, 5) \rangle$ e o plano da simetría é o $\pi: (0, 0, 0) + \langle (1, 3, 0), (0, 5, 1) \rangle$. Observamos que para calcular o subespazo director obtívose o ortogonal de $\langle (3, -1, 5) \rangle$. O ángulo de xiro α cumpre que $-1 + 2 \cos \alpha = 8/9$, isto é, $\cos \alpha = 17/18$. Para determinar se é positivo ou negativo, procedendo como no apartado anterior, obtemos que $\alpha = -\arccos(17/18)$.

- (c) A variedade de puntos fixos é o plano $x + 2z = 0$. O movemento é polo tanto unha simetría especular con respecto a este plano.
- (d) O movemento ten como único punto fixo o $(11/2, -3/2, -7/2)$. O -1 é un valor propio e un vector propio asociado é o $(3/5, -1/5, 1)$. Polo tanto, é unha simetría con respecto ao plano

$$\pi: (11/2, -3/2, -7/2) + \langle (1, 3, 0), (0, 5, 1) \rangle$$

seguida dunha rotación con respecto ao eixe $r: (11/2, -3/2, -7/2) + \langle (3, -1, 5) \rangle$ de ángulo $\arccos(17/18)$.

Problema 3.19. Consideramos a afinidade de \mathbb{E}^3 dada, na referencia canónica, por

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2y + 2z - 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}x \right).$$

- (a) Atopar os puntos fixos e as rectas f -invariantes.
- (b) Demostrar que o plano $\pi: y + z = 1$ é o único plano invariante por f .
- (c) Consideramos a restrición $g = f|_{\pi}: \pi \rightarrow \pi$. Escoller unha referencia ortonormal do plano π e escribir as ecuacións de g nesta referencia.
- (d) Demostrar que g é un movemento do plano π e clasificalo, dando os elementos xeométricos característicos, expresados na referencia ordinaria de \mathbb{E}^3 .

Solución. (a) Un cálculo rutineiro amosa que o único punto fixo é o $(0, 1, 0)$. Como o polinomio característico da parte lineal da afinidade é $-(X - 2)(X^2 + 1)$, o único valor propio real é o 2. Un vector propio de valor propio 2 é o $(0, 1, 0)$, polo que as rectas invariantes serán as da forma $L: (x, y, z) + \langle (0, 1, 0) \rangle$ que cumpran que $f(x, y, z) - (x, y, z) \in \langle (1, 1, 1) \rangle$. É inmediato ver que $x = z = 0$, polo que a única recta invariante é $L: (0, 0, 0) + \langle (0, 1, 0) \rangle$. Convén observar que f non se trata dun movemento, xa que ten valores propios reais diferentes de ± 1 .

- (b) Para atopar os planos invariantes calculamos os vectores propios da trasposta da matriz ampliada. Un cálculo amosa que estes son, salvo múltiplo, $(0, 0, 0, 1)$ e $(0, 1, 1, -1)$. O primeiro correspóndese coa recta do infinito, polo que non o hai que ter en conta; o segundo é o que nos dá o plano $y + z - 1 = 0$. Pódese observar que o único punto fixo é a intersección do plano invariante coa recta invariante.
- (c) Collemos a referencia $\{(1, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}); (0, 1, 0)\}$. Pondo $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ tense que $\tilde{g}(v_1) = v_2$ e $\tilde{g}(v_2) = -v_1$. Como o punto $(0, 1, 0)$ é fixo, a matriz de g nesa referencia é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

- (d) A matriz correspondente á parte lineal é ortogonal, xa que a súa trasposta coincide coa súa inversa. Trátase entón dun xiro de ángulo $\pi/2$ e cuxo centro é o único punto fixo, isto é, o $(0, 1, 0)$.

Problema 3.20. Atopar as ecuacións na referencia natural dos seguintes movementos de \mathbb{E}^3 :

- (a) Unha simetría axial respecto o eixe $x + y = x + z = 0$.
- (b) Un xiro que ten por eixe a recta $x - y = x - z = 0$ orientada polo vector $(1, 1, 1)$ e ángulo $\pi/4$.
- (c) A composición dunha rotación de ángulo $\pi/3$ ao redor da recta $x - y = z = 0$ orientada polo vector $(1, 1, 0)$, seguida dunha simetría especular respecto ao plano ortogonal á recta anterior que pasa polo punto $(2, 2, 2)$.
- (d) Un movemento helicoidal con eixe $r: (1, 2, 1) + \langle(1, 0, -1)\rangle$, ángulo $\pi/2$ e vector de translación $v = (-3, 0, 3)$.

Solución. (a) Unha simetría axial correspóndese cunha rotación de ángulo π . Nese caso, chamando f ao movemento, tense que

$$\tilde{f}(-1, 1, 1) = (-1, 1, 1), \quad \tilde{f}(1, -1, 0) = (-1, 1, 0), \quad \tilde{f}(1, 0, -1) = (-1, 0, 1).$$

Como as imaxes de tres vectores linealmente independentes determinan a parte lineal e a orixe é un punto fixo, temos que a matriz é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- (b) A matriz nunha referencia adaptada da forma $\{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$ é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Para iso, pomos $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$, $v_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e $\{v_2, v_3\}$ escóllense de xeito que sexan unha base ortonormal de $\langle v_1 \rangle^\perp$ que cumpra $v_2 \times v_3 = v_1$. Para achar v_2 e v_3 podemos coller unha base arbitraria e obter unha ortonormal por Gram-Schmidt; por exemplo $v_2 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $v_3 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$. Se pomos

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

entón a matriz buscada é

$$S \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) S^{-1}.$$

A expresión non é especialmente simple, polo que a omitimos.

(c) A matriz reducida da rotación é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

A base na que admite esa expresión é $\{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$, con $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$, $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ e $v_3 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Polo tanto, a matriz da rotación é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3/4 & 1/4 & -\sqrt{6}/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & \sqrt{6}/4 & 0 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

De xeito similar aos apartados anteriores, a matriz da simetría é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Multiplicando as dúas matrices, obtemos que as ecuacións do movemento son

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/4 & -3/4 & -\sqrt{6}/4 & 4 \\ -3/4 & -1/4 & \sqrt{6}/4 & 4 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

(d) Temos que $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ é un vector propio unitario de valor propio $+1$. Collemos agora unha base ortonormal $\{v_2, v_3\}$ de $\langle v_1 \rangle^\perp$ que teña a mesma orientación que a canónica. En particular, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ cumpre as condicións. Nesa base, a matriz da parte lineal é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos agora proceder calculando as imaxes dos vectores da referencia natural 1 a 1 ou facer a matriz de cambio de base. Neste último caso, facemos o produto

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^t$$

e obtemos como resultado

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fáltanos por calcular a imaxe da orixe. Como $f(1, 2, 1) = (-2, 2, 4)$ e

$$(0, 0, 0) = (1, 2, 1) - e_1 - 2e_2 - e_3,$$

temos que

$$f(0, 0, 0) = f(1, 2, 1) - \tilde{f}(e_1) - 2\tilde{f}(e_2) - \tilde{f}(e_3) = (-2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}).$$

Polo tanto, a matriz na base canónica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & -2 - \sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 4 - \sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Problema 3.21. Dar as ecuacións dunha simetría especular en \mathbb{E}^3 con respecto ao plano $x + y + z = -1$ seguida dunha translación de vector $(2, -2, 0)$.

Solución. Imos comezar achando a matriz correspondente á simetría. Sexa f o movemento correspondente e \tilde{f} a isometría correspondente á parte lineal. Tense que

$$\tilde{f}(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad \tilde{f}(1, 0, -1) = (1, 0, -1), \quad \tilde{f}(1, 1, 1) = (-1, -1, -1).$$

Polo tanto, a matriz de \tilde{f} é

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

A perpendicular ao plano $x + y + z = -1$ que pasa por $(0, 0, 0)$ corta ao plano en $(-1/3, -1/3, -1/3)$, polo que a súa imaxe pola simetría é o $(-2/3, -2/3, -2/3)$, e a matriz da simetría é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Facendo a composición coa translación de vector $(2, -2, 0)$, obtemos que a matriz do movemento é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 4/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & -8/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Problema 3.22. Consideramos os planos de \mathbb{E}^3 de ecuacións $\pi_1: x + y + z = 1$ e $\pi_2: x - y = 3$. Sexan f e g as simetrías especulares respecto de π_1 e π_2 , respectivamente. Clasificar o movemento $g \circ f$ e atopar os elementos característicos.

Solución. Os planos non son paralelos, así que a composición das dúas simetrías trátase dunha rotación que ten por eixe a recta

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y &= 3. \end{aligned}$$

Para determinar o ángulo, sabemos que este coincide co formado polos vectores normais a ambos planos. Se lle chamamos α a este valor, temos que

$$\cos \alpha = \frac{\langle (1, 1, 1), (1, -1, 0) \rangle}{\|(1, 1, 1)\| \cdot \|(1, -1, 0)\|} = 0.$$

O ángulo da rotación é o dobre do ángulo formado polos dous planos, polo que é igual a π e o movemento é unha simetría axial.

Imos dar unha solución alternativa en termos de matrices. A matriz correspondente a π_1 é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

mentres que a matriz correspondente a π_2 é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Polo tanto, a matriz da composición é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2/3 & 1/3 & -2/3 & 11/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Trátase dunha rotación con eixe $(2, -1, 0) + \langle (1, 1, -2) \rangle$, xa que $(2, -1, 0)$ é un punto fixo e $(1, 1, -2)$ é un vector propio de valor propio 1. O ángulo α cumpre $1 + 2 \cos \alpha = -1$, polo que $\alpha = \pi$ e trátase dunha simetría axial.

Problema 3.23. No espazo euclidiano \mathbb{E}^3 coa referencia canónica, consideramos os seguintes movementos: f e g son as simetrías especulares con respecto aos planos $\pi: x - y = 0$ e $\pi': x + y + z = 0$, respectivamente, e h ten expresión

$$h(x, y, z) = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 6, -2x - 2y + z + 6, -2x + y - 2z + 6).$$

- Clasificar o movemento $F = h \circ f$ e dar os seus elementos característicos.
- Calcular $F^{15}(0, 0, 0)$.
- Clasificar o movemento $G = g \circ F$ e dar os seus elementos característicos.

Solución. (a) A matriz de f na base canónica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

polo que a matriz de F obtense ao multiplicar as matrices correspondentes a h e f :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 2 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 2 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2/3 & 1/3 & -2/3 & 2 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 2 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

O determinante da parte lineal de \tilde{F} é -1 , polo que se trata dun movemento inverso.

O seguinte que observamos é que o punto $(1, 1, 1)$ é fixo, polo que se trata ou ben dunha simetría especular ou dunha simetría especular seguida dunha rotación; podemos tratar ambos casos á vez considerando que a simetría especular está seguida dun xiro de ángulo cero. Para saber o ángulo α , empregamos que

$$-1 + 2 \cos \alpha = \text{Tr}(\tilde{F}) = -2,$$

de onde temos que $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3}$. O eixe do xiro é $r: (1, 1, 1) + \langle (1, 1, 1) \rangle$, xa que pasa polo punto fixo e está dirixido polos vectores propios de valor propio -1 e o plano de simetría é $\Pi: x+y+z = 3$, xa que contén o punto $(1, 1, 1)$ e o subespazo director é o ortogonal á recta. Para determinar o signo de α , escollemos $u = (1, 1, 1)$ e tomamos un vector arbitrario do plano, como o $v = (1, -1, 0)$. Entón, é suficiente con calcular

$$\det(u, v, \tilde{F}(v)) = -3 < 0,$$

polo que o ángulo de xiro é negativo, isto é, $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

Concluimos que F é a simetría especular con respecto a $\Pi: x + y + z = 3$ seguida dunha rotación de ángulo $-\frac{2\pi}{3}$ con respecto á recta $r: (1, 1, 1) + \langle (1, 1, 1) \rangle$, orientada co vector $(1, 1, 1)$.

- (b) Temos que $F = \rho \circ s$, onde s é a simetría e ρ é o xiro; ademais, $\rho \circ s = s \circ \rho$. Por outro lado, $s^2 = \text{Id}$ e $\rho^3 = \text{Id}$, polo que $F^{15} = \rho^{15} \circ s^{15} = s$. Polo tanto, chega con calcular $s(0, 0, 0)$. Para iso, consideramos a perpendicular ao plano que pasa polo $(0, 0, 0)$, e temos que corta ao plano no punto $(1, 1, 1)$, polo que o simétrico é o $(2, 2, 2)$. En conclusión, $F^{15}(0, 0, 0) = (2, 2, 2)$.
- (c) A matriz de g na base canónica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

polo que a matriz de G é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

É unha comprobación rutineira ver que o determinante de \tilde{G} é $+1$ e que G non ten puntos fixos; como \tilde{G} non é a identidade, trátase dunha rotación seguida dunha translación paralela ao eixe, é dicir, dun movemento helicoidal.

Para atopar o eixe, temos que atopar a única recta invariante; o vector director é o vector propio de valor propio 1 , isto é, o $(1, 1, 1)$; para atopar un punto, impomos que $f(x, y, z) - (x, y, z) \in \langle (1, 1, 1) \rangle$:

$$(y - 2 - x, z - 2 - y, x - 2 - z) \in \langle (1, 1, 1) \rangle;$$

en particular, podemos coller como punto de paso o $(1, 1, 1)$. Polo tanto, o eixe é $r: (1, 1, 1) + \langle (1, 1, 1) \rangle$ e o ángulo de xiro é, procedendo ao igual que antes, $-\frac{2\pi}{3}$.

Para atopar o vector da translación, collemos un punto $q \in r$ e calculamos o vector $w = \mathbf{qG}(q)$. Neste caso, se $q = (1, 1, 1)$, temos que $G(q) = (-1, -1, -1)$, polo que $w = (-2, -2, -2)$.

Concluimos que G é un movemento helicoidal dado por un xiro de $-2\pi/3$ con respecto á recta $r: (1, 1, 1) + \langle(1, 1, 1)\rangle$, orientada co vector $(1, 1, 1)$, seguida dunha translación de vector $(-2, -2, -2)$.

Problema 3.24. Consideramos o movemento $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ descrito na referencia natural pola matriz ampliada

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 2/3 & 1/3 & a \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 & b \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Comprobar que f é un movemento directo. Demostrar que ten puntos fixos se, e soamente se, $c = -a$. Isto pode empregarse para os seguintes apartados aínda que non se demostre.
- Supoñamos que $c = -a$. Clasificar o movemento e atopar os seus elementos característicos.
- Supoñamos que $c \neq -a$. Clasificar o movemento e atopar os seus elementos característicos.

Solución. (a) Trátase dun movemento directo xa que o determinante da parte lineal é $+1$. Observamos ademais que o 1 é un valor propio da parte lineal con multiplicidade 1 , o que nos di que o movemento é ou ben unha rotación ou ben un movemento helicoidal. Para ver en que situación estamos, temos que estudar se hai puntos fixos. Iso é equivalente a que o sistema $f(x, y, z) = (x, y, z)$ teña solucións, ou, o que é o mesmo, a que o rango da matriz dada por restarlle a identidade á parte lineal coincida co da ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 2/3 & 1/3 & a \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 & b \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 & c \end{array} \right).$$

A terceira columna coincide coa primeira cambiada de signo; polo tanto, se o termo independente é combinación lineal da primeira e da segunda, tense que

$$\lambda(-1/3, 2/3, 1/3) + \mu(2/3, -2/3, -2/3) = (a, b, c).$$

Igualando a primeira e a terceira compoñente, temos que $a = -c$. Logo, o sistema dado pola primeira e a segunda compoñente é compatible determinado, polo que a condición $c = -a$ é necesaria e suficiente.

- Neste caso, o movemento ten unha recta de puntos fixos, polo que se trata dunha rotación. O eixe da rotación é o $(a + b, -a + b/2, 0) + \langle(1, 0, 1)\rangle$ e o ángulo da rotación α cumpre que $1 + 2 \cos \alpha = 5/3$, polo que $\alpha = \pm \arccos(1/3)$. Para determinar o signo, collemos un vector arbitrario linealmente independente co

$(1, 0, 1)$, como por exemplo o $v = (1, 0, 0)$; temos que $\tilde{f}(v) = (2/3, -2/3, 1/3)$, e como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = -2/3 < 0,$$

o ángulo de xiro é negativo.

- (c) Neste caso, o movemento non ten puntos fixos, e como é directo e a matriz da parte lineal non é a identidade, trátase dun movemento helicoidal. Para atopar o eixe, buscamos a única recta invariante, que, polo visto no apartado anterior, ten vector director $(1, 0, 1)$. Para achar un punto (x, y, z) , impomos que

$$\frac{1}{3}(-x + 2y + z + 3a, -2x - 2y + 2z + 3b, x - 2y - z + 3c) \in \langle (1, 0, 1) \rangle.$$

Quédanos nese caso que $y = (b + c - a)/2$ e $x - z = (a - c + 2b)/2$, polo que o eixe é

$$L: ((a - c + 2b)/2, (b + c - a)/2, 0) + \langle (1, 0, 1) \rangle.$$

O ángulo é, ao igual que antes, $\arccos(1/3)$. Finalmente, para achar o vector de translación, collemos un punto p do eixe e calculamos $f(p) - p$. Pondo por exemplo $p = ((a - c + 2b)/2, (b + c - a)/2, 0)$, temos que

$$f(p) - p = \left(\frac{a + c}{2}, 0, \frac{a + c}{2} \right).$$

Pódese observar que se tivésemos $a + c = 0$, corresponderíase co vector $(0, 0, 0)$.

Problema 3.25. Sexa \mathbb{E}^3 o espazo afín euclidiano estándar. Sexa $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ o movemento que ten por ecuacións na referencia ordinaria

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y - z + 1, -\sqrt{2}x - \sqrt{2}z - \sqrt{2}, -x - \sqrt{2}y + z + 1).$$

- (a) Clasificar o movemento f e dar os seus elementos característicos.
- (b) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, sexa s_λ a simetría con respecto ao plano $x - \sqrt{2}y + z = \lambda$. Demostrar que $s_\lambda \circ s_0$ é unha translación e achar o vector correspondente á translación.
- (c) Sexa H_2 o plano de ecuación $x - \sqrt{2}y + z = 0$. Atopar dous planos H_1 e H_3 de xeito que, se $f_i: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ é a simetría especular respecto ao plano H_i , entón $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.
- (d) É posible escribir o movemento f como a composición de catro simetrías especulares?

Solución. (a) A matriz do movemento é

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

O movemento non ten puntos fixos e o determinante da isometría correspondente é -1 . Polo tanto, trátase dunha simetría especular esvaradía. Os seus elementos característicos son o plano de simetría e o vector de translación. Tense que

os vectores propios de valor propio 1 son combinacións lineais de $(1, 0, -1)$ e $(-\sqrt{2}, 1, 0)$, polo que o plano de simetría será da forma $x + \sqrt{2}y + z + \lambda = 0$. Compróbase que un plano desta forma é invariante se, e soamente se, $\lambda = 0$. Alternativamente, a ecuación pódese obter impondo que $\mathbf{pf}(\mathbf{p})$ pertenza ao subespazo $\langle (1, 0, -1), (-\sqrt{2}, 1, 0) \rangle$. Finalmente, se collemos un punto p no plano, temos que o vector da translación será $\mathbf{pf}(\mathbf{p})$.

En conclusión, é unha simetría con respecto ao plano $x + \sqrt{2}y + z = 0$ seguida dunha translación de vector $(1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2)$.

- (b) A composición de dúas simetrías con respecto a planos paralelos é unha translación. Para determinar o vector da translación, é suficiente con calcular a imaxe dun punto. Por exemplo,

$$s_\lambda(s_0(0, 0, 0)) = s_\lambda(0, 0, 0).$$

A proxección ortogonal de $(0, 0, 0)$ no plano $x - \sqrt{2}y + z = \lambda$ é $(m, -\sqrt{2}m, m)$, con $m = \frac{\lambda}{4}$. Polo tanto,

$$s_\lambda(s_0(0, 0, 0)) = (2m, -2\sqrt{2}m, 2m) = \left(\frac{\lambda}{2}, -\frac{\sqrt{2}\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right).$$

Isto quere dicir que o vector correspondente á translación é $v_\lambda = \left(\frac{\lambda}{2}, -\frac{\sqrt{2}\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$.

- (c) Escollemos $H_1: x + \sqrt{2}y + z = 0$ e $H_3: x - \sqrt{2}y + z = 1$. Polo visto no apartado anterior, $f_3 \circ f_2$ é unha translación de vector $v = (1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2)$, polo que a composición correspóndese coa simetría con respecto a H_1 seguida dunha translación de vector v , que é precisamente f .
- (d) O movemento f é inverso, xa que $\det \tilde{f} = -1$. A composición dun número par de simetrías especulares é un movemento directo, xa que o determinante da parte lineal de cada unha delas é -1 . Polo tanto, non se pode expresar f como a composición dun número par de simetrías especulares.

Problema 3.26. Se $ABCD$ é un tetraedro regular dun espazo afín euclidiano, determinar que movemento é a composición $s_{AD} \circ s_{AC} \circ s_{AB}$, onde s_r denota a simetría axial respecto da recta r .

Solución. Imos comezar fixando un sistema de referencia axeitado $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$. Collemos como orixe o punto A , e podemos supoñer tamén, sen perder xeneralidade, que a lonxitude da aresta do tetraedro é 1; en caso contrario, multiplícanse tódalas coordenadas pola lonxitude. Escollemos v_1 de xeito que coincida coa aresta AB , e a coordenada x de B sexa positiva. Entón, $B = (1, 0, 0)$. De xeito similar, facemos que o plano xerado por A, B e C se corresponda con $z = 0$ e a coordenada y de C sexa positiva, polo que $C = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$. Finalmente, se D' é a proxección de D no plano $z = 0$ tense que coincide co centro do triángulo equilátero ABC , polo que $D' = (1/2, \sqrt{3}/6, 0)$. Se impomos que a coordenada z de D sexa positiva, entón $D = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3)$. Para achar as matrices das simetrías axiais, podemos empregar a fórmula da rotación no caso particular no que o xiro é de ángulo π . Entón, unha rotación con respecto ao eixe $r: p + \langle u \rangle$, con $\|u\| = 1$ cumpre que

$$f(q) = p - v + 2\langle u, v \rangle u,$$

onde $v = \mathbf{pq}$.

As matrices das simetrías axiais AB , AC e AD son, respectivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{3}/6 & -5/6 & \sqrt{2}/3 & 0 \\ \sqrt{6}/3 & \sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Multiplicando, obtemos que a matriz da composición é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 2/3 & \sqrt{2}/3 & 0 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

O determinante é positivo e hai puntos fixos, polo que se trata dunha rotación. Para achar o eixe, escollemos un vector propio de valor propio 1, por exemplo, o $u = (0, \sqrt{2}, 1)$. Para o ángulo α , sabemos que $1 + 2 \cos \alpha = 1$, polo que $\alpha = \pi/2$ se collemos unha base orientada $\{v, w\}$ de $\langle u \rangle^\perp$, por exemplo, $v = (1, 0, 0)$ e $w = (0, 1, -\sqrt{2})$. É dicir, a restrición ao plano $\sqrt{2}y + z = 0$ é un xiro de ángulo $\pi/2$ con respecto á orientación dada pola base $\{v, w\}$.

O feito de que sexa unha rotación podíase deducir sen necesidade de facer cálculos: sabemos que o punto A é fixo e que se trata dun movemento directo, xa que a composición de movementos directos é un movemento directo. Entón, como non é a identidade, é unha rotación con respecto a un eixe.

Problema 3.27. Sexa ABC un triángulo do plano euclidiano \mathbb{E}^2 . Denotamos por A' , B' e C' os puntos medios dos lados BC , CA e AB , respectivamente, e por G , H e O o baricentro, ortocentro e circuncentro do triángulo ABC . *Observación.* Para os dous primeiros apartados, supoñer que estamos nun espazo afín \mathbb{A}^2 (é dicir, que non é necesariamente euclidiano).

- Demostrar que existe unha única afinidade f que cumpre $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$. Clasificala e achar os seus puntos fixos.
- Usar o apartado anterior para atopar a razón simple (A, A', G) .
- Sexa $P = f(O)$. Demostrar que os triángulos AGP e $A'GO$ son semellantes e que AP é paralela a $A'O$.
- Concluír que G , H e O están aliñados e achar (H, O, G) .

Solución. (a) Como A , B e C son tres puntos afinmente independentes no plano, fixadas as súas imaxes, existe unha única afinidade con esas propiedades. Fixando unha referencia $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}; A\}$, temos que a matriz é

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Trátase dunha homotecia de razón $-1/2$, na que polo tanto hai un único punto fixo, que é o baricentro $G = (1/3, 1/3)$.

- (b) A razón simple é o escalar λ que cumpre

$$\mathbf{AG} = \lambda \mathbf{AA}'.$$

Como $\mathbf{AG} = (1/3, 1/3)$ e $\mathbf{AA}' = (1/2, 1/2)$, temos que $\lambda = 2/3$.

- (c) Pola definición de P , sabemos que $(A, A', G) = (P, O, G) = 2/3$. Polo tanto, os triángulos AGP e $A'GO$ teñen un ángulo igual e os lados correspondentes proporcionais; iso quere dicir que son semellantes. Alternativamente, o triángulo AGP é a imaxe de $A'GO$ por unha homotecia de centro G e razón 2. Como AP é a imaxe de $A'O$ pola homotecia, e a imaxe dunha recta por unha homotecia é paralela á recta orixinal, temos que AP é paralela a $A'O$.
- (d) Do apartado anterior, temos que AP é perpendicular ao lado BC , polo que AP é unha altura do triángulo. De xeito similar, BP e CP tamén son alturas, polo que P é o ortocentro do triángulo. Tense entón que $(O, H, G) = 2/3$.

Capítulo 4

Cónicas e cuádricas

Ata o de agora estudamos as variedades afíns e proxectivas definidas por polinomios de grao un. Neste tema consideraremos o caso no que están definidas por polinomios de grao 2.

Imos traballar coas cónicas e coas cuádricas nas tres xeometrías que estudamos: euclidiana, afín e proxectiva. Por exemplo, dúas circunferencias de diferente radio son equivalentes no sentido afín, é dicir, pódese transformar unha noutra mediante unha transformación afín (como unha homotecia), pero non mediante un movemento. Pola súa banda, unha circunferencia e unha parábola son proxectivamente equivalentes, xa que hai unha proxectividade que leva unha na outra, pero non existe ningunha afinidade así.

A visión clásica das cónicas pasa por considerar os cortes dun plano cun cono dobre, é dicir, un cono con dous vértices que se tocan. Os planos que pasan polo vértice cortan ao cono nun punto, nunha liña ou nun par de liñas que se cortan; son as chamadas *cónicas dexeneradas*. Logo, hai tres tipos de cónicas: as *elipses* son as que se obtéñen cando a intersección do plano e do cono é unha curva peachada, sendo a circunferencia un caso particular; as *parábolas* obtéñense cando o plano é paralelo exactamente a unha das xeratrices do cono; e en caso contrario temos a *hipérbole*, cando o plano corta ás dúas metades do cono, producindo así dúas curvas non limitadas.

4.1. Anatomía do círculo

O estudo das cónicas é, ademais de na xeometría, fonte de numerosos problemas noutras áreas das matemáticas. A modo de motivación, imos explicar un problema clásico: achar tódalas *ternas pitagóricas*, é dicir, ternas $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^{>0}$ de xeito que $a^2 + b^2 = c^2$. Imos comezar realizando un exercicio máis sinxelo. Achar as solucións racionais de $x^2 + y^2 = 1$. Para iso, procedemos como segue. O punto $(-1, 0)$ cumpre a ecuación; se hai outro punto con coordenadas racionais, entón a recta que os une ten pendente racional. Do mesmo xeito, se consideramos a recta que pasa polo $(-1, 0)$ e ten pendente $\lambda \in \mathbb{Q}$, o segundo punto de corte tamén ten coordenadas racionais, xa que é unha solución de

$$\lambda^2(x^2 + 2x + 1) + x^2 = 1.$$

Unha é $x = -1$, e a outra, $x = -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}$. Polo tanto, como non importa o signo, unha solución xenérica é

$$\left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}, \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \right).$$

Alternativamente, se consideramos a ecuación proxectiva

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

a solución xenérica é $[\lambda^2 - 1 : 2\lambda : \lambda^2 + 1]$. Pondo $\lambda = m/n$, con $(m, n) = 1$, quedanos $[m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2]$. Tense que

$$\gcd(m^2 - n^2, m^2 + n^2) = \gcd(2m^2, m^2 + n^2) = \gcd(2, m^2 + n^2),$$

polo que cando m e n son ambos impares a solución non é primitiva.

Polo tanto, as ternas pitagóricas primitivas son as da forma

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2),$$

de xeito que $(m, n) = 1$ e un deles é par.

Supoñamos agora que estamos en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Entón, se chamamos N_p ao número de solucións afíns de

$$x^2 + y^2 = 1,$$

cúmprese o seguinte:

$$N_p = \begin{cases} p - 1 & \text{se } p \equiv 1 \pmod{4} \\ p + 1 & \text{se } p \equiv 3 \pmod{4} \\ 2 & \text{se } p = 2. \end{cases}$$

É dicir, o número de solucións afíns de $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{p}$ é da forma $p + \delta$, onde $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ e toma un valor ou outro segundo o resto de p módulo 4. Un cálculo interesante amosa que

$$\prod_p \frac{N_p}{p} = \frac{4}{\pi},$$

onde o produto se fai sobre tódolos primos.

En cambio, se consideramos a cónica proxectiva $x^2 + y^2 = z^2$, temos que o número de solucións módulo p é sempre $p + 1$. Isto débese a que o número de puntos na recta do infinito correspóndese co número de solucións de $x^2 + y^2 = 0$: hai 2 se p é impar e -1 é un cadrado; 1 se $p = 2$; e 0 se -1 non é un cadrado.

4.2. Definicións e representación matricial

Comezamos co estudo no plano euclidiano \mathbb{E}^2 , onde fixamos a referencia canónica $\mathcal{R} = \{e_1, e_2; \mathcal{O}\}$.

Definición 4.2.1. Unha cónica Q en \mathbb{E}^2 é un polinomio de grao 2

$$Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \in \mathbb{R}_2[x, y],$$

determinado salvo multiplicación por un escalar non nulo, é dicir, un elemento de $\mathbb{P}(\mathbb{R}_2[x, y])$. O conxunto de puntos da cónica Q é

$$C = \{(a, b) \in \mathbb{E}^2 \mid Q(a, b) = 0\}.$$

A definición pode estenderse ao caso de dimensión n , fixando unha referencia $\mathcal{R} = \{e_1, e_2, \dots, e_n; \mathcal{O}\}$.

Definición 4.2.2. Unha cuádrlica Q en \mathbb{E}^n é un polinomio de grao 2

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n],$$

determinado salvo multiplicación por un escalar non nulo, é dicir, un elemento de $\mathbb{P}(\mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n])$. O conxunto de puntos da cuádrlica Q é

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n \mid Q(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Unha observación importante é que non é correcto identificar unha cónica co seu conxunto de puntos. Por exemplo, os polinomios $Q_1(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ e $Q_2(x, y) = x^2 + 1$ dan ambos lugar ao conxunto baleiro sobre os reais, pero non existe ningunha constante real $\lambda \neq 0$ de xeito que $x^2 + y^2 + 1 = \lambda(x^2 + 1)$.

Exemplo. A circunferencia de radio r , $x^2 + y^2 = r^2$, é unha cónica. Dúas rectas tamén determinan unha cónica: por exemplo,

$$(x + y)(x - y + 1) = x^2 - y^2 + x + y = 0.$$

A unha cónica definida por $Q = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ asociámoslle a matriz

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a & c/2 & d/2 \\ c/2 & b & e/2 \\ \hline d/2 & e/2 & f \end{array} \right).$$

Deste xeito temos que

$$Q = (x \quad y \quad | \quad 1) \left(\begin{array}{cc|c} a & c/2 & d/2 \\ c/2 & b & e/2 \\ \hline d/2 & e/2 & f \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Máis en xeral, á cuádrlica

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$$

asígnaselle a matriz

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} & \frac{b_1}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \dots & \frac{a_{2n}}{2} & \frac{b_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \dots & a_{nn} & \frac{b_n}{2} \\ \hline \frac{b_1}{2} & \frac{b_2}{2} & \dots & \frac{b_n}{2} & c \end{array} \right).$$

Imos pasar agora a definir as cuádrlicas no contexto proiettivo. A modo de notación, sexa $T_2(E) = \{\varphi: E \times E \rightarrow K \mid \varphi \text{ bilineal e simétrica}\}$ o conxunto dos 2-tensores covariantes simétricos. Cando a característica é diferente de 2, hai unha bixección entre formas bilineais simétricas e formas cuadráticas.

Definición 4.2.3. Unha cuádrlica Q dun espazo proiettivo \mathbb{P} é un elemento de $\mathbb{P}(T_2(E))$. É dicir, $Q = [\varphi]$ é o subespazo vectorial de dimensión 1 xerado por unha forma bilineal simétrica non nula φ . Unha *cónica* é unha cuádrlica dun espazo proiettivo de dimensión 2.

Dada $Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ unha cónica afín en \mathbb{E}^2 , a cónica proectiva asociada é $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz + fz^2$.

Por outro lado, se $Q = [\varphi]$ é unha cuádrlica e M é a súa matriz nunha base fixada, a matriz de Q é o elemento $[M]$ en $\mathbb{P}(\mathcal{M}_{n+1}(K))$.

4.3. Clasificación métrica e afín das cónicas e das cuádricas

Sexan \mathcal{R} e \mathcal{R}' dúas referencias afíns e sexa

$$\tilde{S} = \left(\begin{array}{c|c} P & q \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

a matriz de cambio de base entre \mathcal{R}' e \mathcal{R} . Polo tanto, se \tilde{A} e \tilde{B} son as matrices da cónica nas dúas referencias, temos que

$$x^t \tilde{B} x = (\tilde{S}x)^t \tilde{A} (\tilde{S}x) = x^t \tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S} x.$$

Polo tanto, a relación entre as matrices é $\tilde{B} = \tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S}$. Se pomos

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & c \end{array} \right),$$

temos entón que a matriz en \mathcal{R}' é

$$\left(\begin{array}{c|c} P^t & 0 \\ \hline q^t & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & c \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} P & q \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} P^t A P & P^t (Aq + b) \\ \hline (Aq + b)^t P & Q(q) \end{array} \right),$$

onde $Q(q) = q^t A q + 2q^t b + c$.

Definición 4.3.1. Dise que dúas cónicas ou cuádricas de matrices \tilde{A} e \tilde{B} son *metricamente equivalentes* se hai un cambio de referencia ortonormal S tal que

$$\tilde{B} = \tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S}.$$

Isto é equivalente a dicir que admiten a mesma matriz en certos sistemas de referencia ortonormais.

Dise que as cónicas ou as cuádricas son *afinamente equivalentes* se hai un cambio de referencia afín S tal que

$$\tilde{B} = \tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S}.$$

En particular, dúas cónicas metricamente equivalentes son afinamente equivalentes, pero o recíproco non é certo. Por exemplo, as circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ son afinamente equivalente, pero non son metricamente equivalentes.

Definición 4.3.2. Dicimos que un punto $p \in \mathbb{E}^n$ é un *centro da cuádrlica* Q se $Ap + b = 0$.

Proposición 4.3.1. Sexa Q unha cuádrlica de xeito que existe unha solución para $Aq = -b$. Entón, existe unha referencia ortonormal \mathcal{R} na cal a matriz da cuádrlica é diagonal.

Demostración. Para obter a forma reducida imos proceder do seguinte xeito:

- Pola hipótese do enunciado, sabemos que existe un punto q de xeito que $Aq = -b$. Isto permite garantir que a parte con coeficientes de grao 1 é cero.
- Para a parte cuadrática, polo teorema espectral real, é posible escoller unha matriz ortogonal P de xeito que $P^t A P$ sexa diagonal.

□

Para a referencia que se describiu, o termo constante, $b^t p + c$, coincide co valor da cuádriga no centro, xa que

$$(p^t \mid 1) \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & c \end{array} \right) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = (p^t \mid 1) \begin{pmatrix} 0 \\ b^t p + c \end{pmatrix} = b^t p + c.$$

Imos realizar a continuación a clasificación métrica e afín no caso real para dimensión 1, 2 e 3.

Clasificación en dimensión 1

Imos comezar estudando as cuádriga da recta. A cuádriga vén dada por un polinomio $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Polo tanto, o conxunto de puntos pode corresponderse con dous puntos diferentes (se a raíz ten dúas solucións diferentes), cun punto dobre (dúas raíces repetidas) ou co baleiro (ningunha solución). A matriz da cuádriga é

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b/2 \\ \hline b/2 & c \end{array} \right),$$

e se $a \neq 0$ sempre ten centro. Polo tanto, admite unha forma reducida da forma $ax^2 + d$, o que permite clasificar a cuádriga de xeito inmediato: se $d = 0$, trátase dun punto dobre; se a e d teñen distinto signo, correspóndese con dous puntos; e se teñen o mesmo signo, é o conxunto baleiro (falamos tamén de dous puntos imaxinarios).

A seguinte táboa recolle os diferentes tipos de cuádrigas da recta.

Exemplo	Nome
$x^2 - 1 = 0$	Dous puntos
$x^2 = 0$	Punto dobre
$x^2 + 1 = 0$	Dous puntos imaxinarios

Clasificación en dimensión 2

Sexa Q unha cónica con centro e p un dos centros. Nun sistema de referencia $\mathcal{R} = \{u_1, u_2; p\}$ a matriz da cónica é

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & d \end{array} \right),$$

onde λ e μ son os valores propios de A e $d = Q(p)$ é o valor do polinomio que define a cónica en p . Polo tanto, nesta referencia, a ecuación da cónica é

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + d = 0.$$

É o que se chama *ecuación reducida* da cónica.

Supoñamos agora que $d \neq 0$. Se adicionalmente λ e μ son distintos de cero, dividindo por d chegamos a unha ecuación da forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $a^2 = |d/\lambda|$ e $b^2 = |d/\mu|$. Hai cinco casos posibles segundo os valores de μ e dos signos.

- Se $\mu \neq 0$ e os signos son ambos positivos, dicimos que é unha *elipse real*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Se $\mu \neq 0$ e os signos son ambos negativos, dicimos que é unha *elipse imaxinaria*, de ecuación reducida

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Se $\mu \neq 0$ e os signos son un positivo e un negativo, dicimos que é unha *hipérbole*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Se $\mu = 0$ e o signo é positivo, a cónica está formada por un *par de rectas paralelas*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} = 1.$$

- Se $\mu = 0$ e o signo é negativo, a cónica está formada por un *par de rectas imaxinarias paralelas*, de ecuación reducida

$$-\frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Supoñamos agora que $d = 0$. O centro p é un punto da cónica, polo que a ecuación reducida é da forma

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = 0.$$

Hai tres casos segundo os valores de μ e dos signos.

- Se $\mu \neq 0$ e os signos son iguais, entón a cónica está formada por un *par de rectas imaxinas* que se cortan no punto real $(0, 0)$. A ecuación reducida é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

- Se μ e λ teñen distinto signo, entón a cónica está formada por un *par de rectas reais non paralelas*, con ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

- Se $\mu = 0$, a única posibilidade é entón $x^2 = 0$, que se trata dunha *recta dobre*.

Exemplo. Sexa $Q(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6x + 16y + 24$. A matriz da cónica é

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 24 \end{pmatrix}.$$

Para determinar o(s) centro(s), resolvemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

4.3. CLASIFICACIÓN MÉTRICA E AFÍN DAS CÓNICAS E DAS CUÁDRICAS 213

Polo tanto, o centro é o punto $(x, y) = (-3, -2)$. Cúmrese que $Q(-3, -2) = -1$, e os valores propios de A son 1 e 4. Polo tanto, a forma reducida é

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0.$$

Trátase entón dunha elipse (real).

Sexa agora $Q(x, y) = xy - 4x - 2y$. Neste caso, a matriz é

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procedendo como antes, vemos que o centro é o $(2, 4)$. Como $Q(2, 4) = 0$ e os valores propios de A son $\pm 1/2$, temos que a ecuación reducida é

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2,$$

polo que se trata de dúas rectas que se cortan nun punto real.

Pasamos agora ás cónicas sen centro. Neste caso, o rango de A ten que ser 1, polo que 0 é un valor propio e podemos supor, sen perder xeralidade, que $\mu = 0$. Polo tanto, supoñamos que consideramos un sistema de referencia na que os vectores da referencia son valores propios de A . Polo tanto, a ecuación será da forma $Q(x, y) = ax^2 + bx + cy + d$, con $c \neq 0$ pola condición de que non teña centro. Agora, podemos escribir

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + cy + d &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + cy + \left(d - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{d}{c} - \frac{b^2}{4a^2c}\right). \end{aligned}$$

Polo tanto, nas coordenadas $x' = x + \frac{b}{2a}$ e $y' = y + \frac{d}{c} - \frac{b^2}{4a^2c}$ temos que a cuádrlica se expresa como $a\tilde{x}^2 + c\tilde{y}$.

Podemos reformular esta idea traballando coa linguaxe matricial.

Lema 4.3.1. Existe un único punto $p \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de xeito que $p^t \tilde{A} u_1 = 0$ e $p \in Q$. Este punto chámase *vértice* da cónica Q .

Demostración. Se \mathcal{O} é a orixe de coordenadas na referencia canónica, pomos $p = \mathcal{O} + x_1 u_1 + x_2 u_2$, onde $\{u_1, u_2\}$ é a base ortogonal na que diagonaliza A . Entón, a condición $p^t \tilde{A} u_1 = 0$ é equivalente a $\lambda x_1 = -b^t u_1$, o que determina o valor de x_1 . Da condición $p^t \tilde{A} p = 0$ sácase unha ecuación de primeiro grao en x_2 que admite unha única solución. \square

No sistema de referencia dado por $\mathcal{R} = \{u_1, u_2; p\}$, onde $\{u_1, u_2\}$ é unha base ortonormal de vectores propios e p é o punto dado polo lema anterior, a matriz da cónica escríbese como

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \hline 0 & \alpha & 0 \end{array} \right),$$

onde λ é o valor propio non nulo de A e $\alpha = p^t \tilde{A} u_2$. Polo tanto, a ecuación reducida da cónica é

$$\lambda x^2 + 2\alpha y = 0.$$

Collendo $b = -\alpha/\lambda$, a ecuación reducida queda

$$x^2 - 2by = 0.$$

Dicimos que a cónica é unha *parábola*, e é a única cónica sen centro. Ademais, cambiando u_2 por $-u_2$, a ecuación reducida queda $x^2 + 2by = 0$, polo que o signo do coeficiente lineal non desempeña un papel determinante e pódese escoller segundo conveña.

Exemplo. Consideremos a cónica $Q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 6y + 4$. A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

e a ecuación do centro é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Como non hai solución, trátase dunha parábola. Para achar o vértice $p = (x, y)$, usamos que $u_1 = (1, 1)$, polo que

$$(x \quad y \quad | \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Isto quere dicir que $x + y = -2$. Cambiando $y = -2 - x$ na ecuación da cónica temos que $x = -1$ e $y = -1$. Polo tanto, o vértice é $p = (-1, -1)$ e $\alpha = p^t \tilde{A} u_2 = -\sqrt{2}$. A ecuación reducida é

$$2x^2 - 2\sqrt{2}y = 0.$$

A seguinte táboa amosa os diferentes tipos de cónica. É importante facer énfase na diferenza entre *clasificación afín* e *clasificación métrica* (ou euclidiana). O segundo tipo é o que traballamos principalmente ata o de agora, e pasa por considerar que dúas cónicas son equivalentes cando existe un cambio de referencia ortonormal que pasa dunha a outra. Desde a perspectiva afín, dúas elipses calquera, por exemplo, sempre son equivalentes.

A seguinte táboa amosa os diferentes tipos de cónicas que existen.

Exemplo	Nome
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Elipse imaxinaria
$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Elipse
$x^2 - y^2 - 1 = 0$	hipérbole
$x^2 + 2y = 0$	Parábola
$x^2 + y^2 = 0$	Punto
$x^2 + 1 = 0$	Dúas rectas imaxinarias
$x^2 - y^2 = 0$	Dúas rectas
$x^2 - 1 = 0$	Dúas rectas paralelas
$x^2 = 0$	Recta dobre

Clasificación en dimensión 3

Sexa Q unha cuádrlica con centro e p un dos centros. Nun sistema de referencia $\mathcal{R} = \{u_1, u_2, u_3; p\}$ a matriz da cónica é

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d \end{array} \right),$$

onde λ, μ e ν son os valores propios de A e $d = Q(p)$ é o valor do polinomio que define a cónica en p . Polo tanto, nesta referencia, a ecuación da cónica é

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + d = 0.$$

É o que se chama *ecuación reducida* da cónica.

Supoñamos agora que $d \neq 0$. Se $\lambda, \mu, \nu \neq 0$, dividindo por d , chegamos a unha ecuación da forma

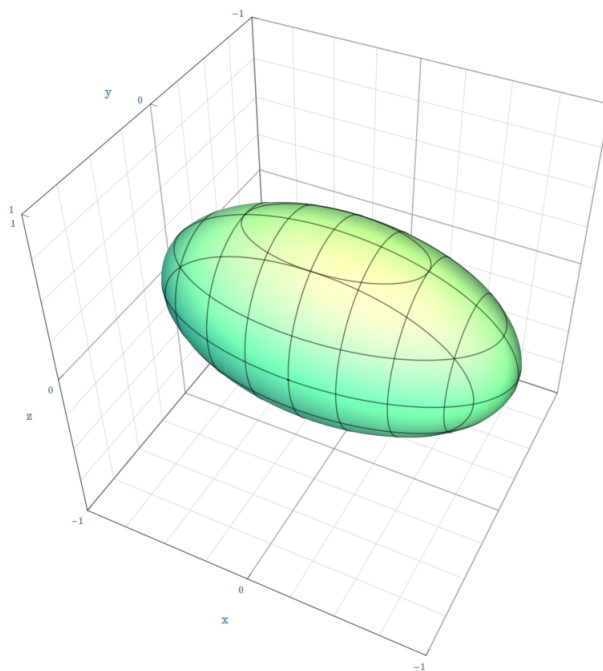
$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

onde $a^2 = |d/\lambda|$, $b^2 = |d/\mu|$ e $c^2 = |d/\nu|$. Hai nove casos posibles segundo os valores de μ, ν e dos signos.

- Se $\mu, \nu \neq 0$ e os signos son os tres positivos, dicimos que é un *elipsoide real*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Se $a \geq b \geq c$, adoita falarse de *ecuación canónica*. No caso no que $a = b = c$, dicimos que é unha *esfera* de radio 1.



- Se $\mu, \nu \neq 0$ e os signos son os tres negativo, dicimos que é un *elipsoide imaxinario*, de ecuación reducida

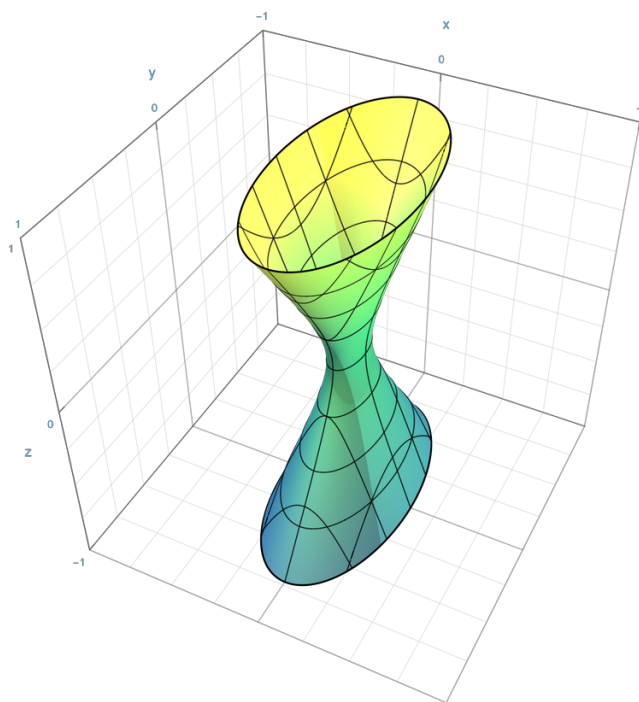
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Se $a \geq b \geq c$, adoita falarse de *ecuación canónica*. No caso no que $a = b = c$, dicimos que é unha *esfera imaxinaria*.

- Se $\mu, \nu \neq 0$ e exactamente dous dos signos son positivos, dicimos que é un *hiperboloide dunha folla*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

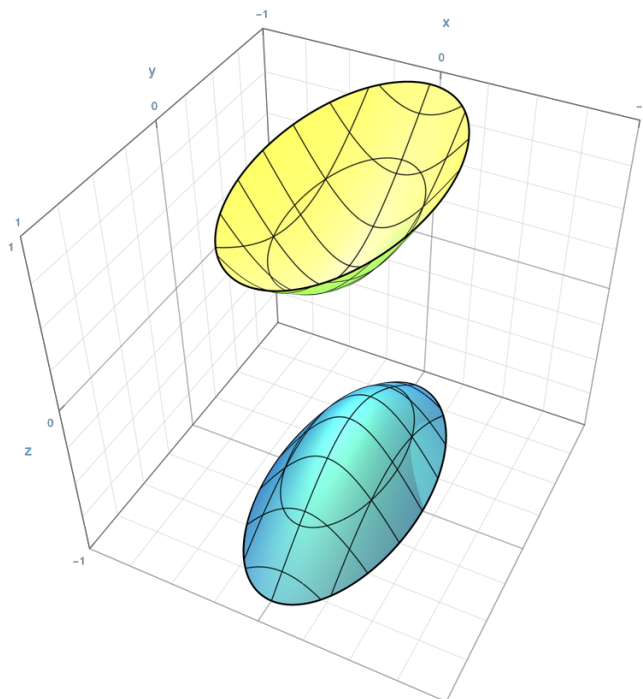
Se $a \geq b$, adoita falarse de *ecuación canónica*.



- Se $\mu, \nu \neq 0$ e exactamente un dos signos é positivo, dicimos que é un *hiperboloide de dúas follas*, de ecuación reducida

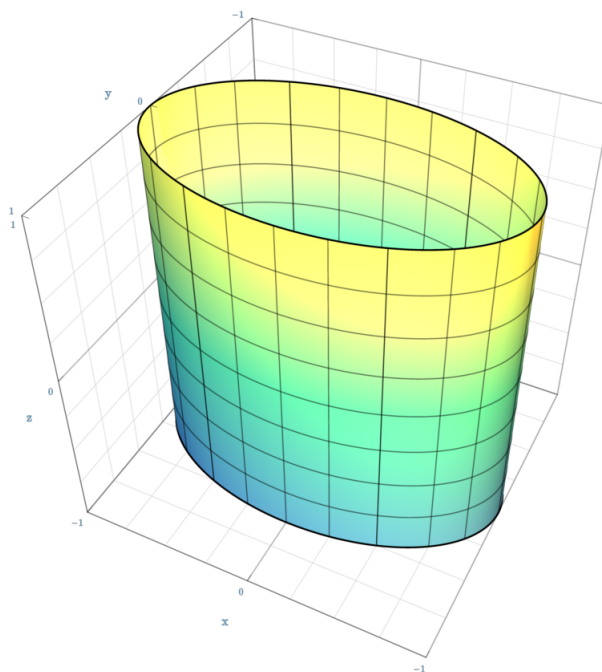
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Se $b \geq c$, adoita falarse de *ecuación canónica*.



- Se $\mu \neq 0$, $\nu = 0$ e os signos son ambos positivos, dicimos que é un *cilindro elíptico*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

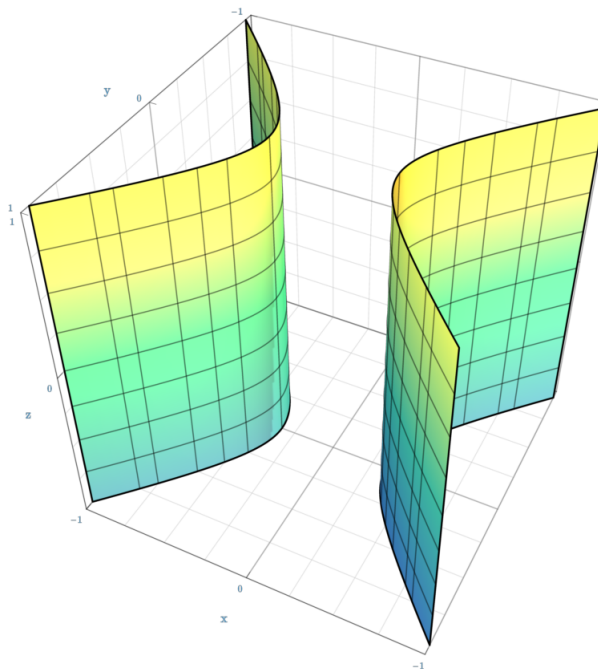


- Se $\mu \neq 0$, $\nu = 0$ e os signos son ambos negativos, dicimos que é un *cilindro elíptico imaxinario*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

- Se $\mu \neq 0$, $\nu = 0$ e os signos son distintos, dicimos que é un *cilindro hiperbólico*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



- Se $\mu = \nu = 0$ e o signo é positivo, a cuádrlica está formada por un *par de planos paralelos*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} = 1.$$

- Se $\mu = \nu = 0$ e o signo é negativo, a cuádrlica está formada por un *par de planos imaxinarios paralelos*, de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} = -1.$$

Supoñamos agora que $d = 0$. O centro p é un punto da cónica, polo que a ecuación reducida é da forma

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 0.$$

Hai cinco casos segundo os valores de μ , ν e dos signos.

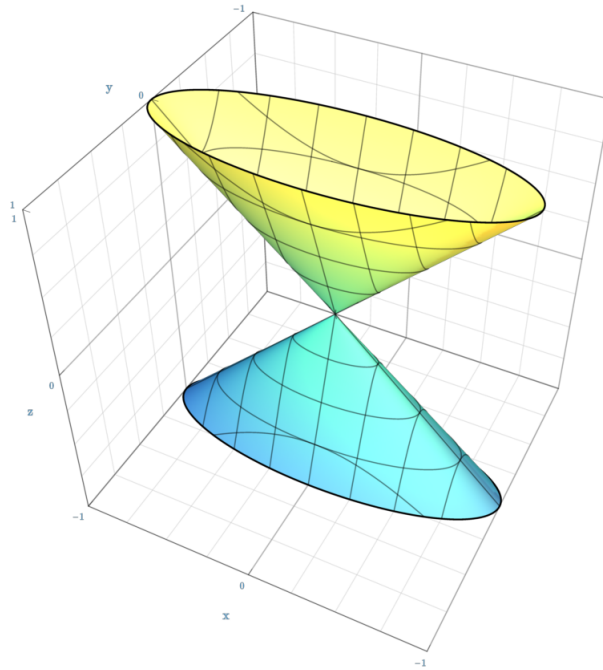
- Se $\mu, \nu \neq 0$ e os signos son iguais, dicimos que é un *cono imaxinario* de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 0.$$

O único punto real que contén é o $(0, 0, 0)$.

- Se $\mu, \nu \neq 0$ e os signos non son iguais, a cuádrlica é un *cono* con ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0.$$



- Se $\mu \neq 0, \nu = 0$ e os signos son iguais, a cuádrlica está formada por *dous planos imaxinarios que se cortan nunha recta real*, e a ecuación reducida é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

- Se $\mu \neq 0, \nu = 0$ e os signos son diferentes, a cuádrlica está formada por *dous planos reais que se cortan nunha recta*, e a ecuación reducida é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

- Se $\mu = \nu = 0$, a única posibilidade é

$$z^2 = 0,$$

que se corresponde cun *plano dobre*.

Pasamos agora a estudar as cónicas sen centro, que se poden escribir como

$$\lambda x^2 \pm \mu y^2 - 2\alpha z = 0.$$

O seguinte resultado é análogo ao que demostramos para dimensión 2.

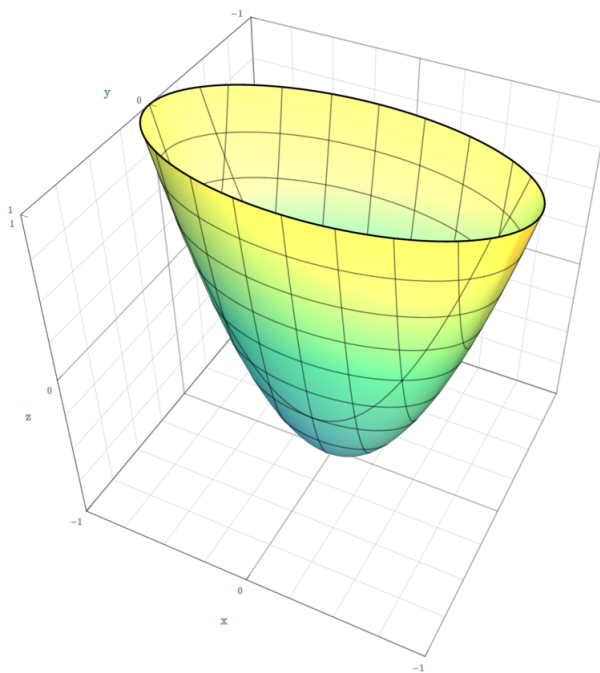
Lema 4.3.2. Existe un punto $p \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ de xeito que $p^t \tilde{A}u_1 = p^t \tilde{A}u_2 = 0$ e $p \in Q$.

Demostración. A demostración é análoga á do caso de dimensión 2. □

Dividindo polo valor $p^t \tilde{A}u_3$, podemos supoñer sen perder xeralidade que $\alpha = 1$, e traballar con ecuacións da forma $\lambda x^2 + \mu y^2 = 2z$. Hai tres opcións segundo os valores de μ , que pode ser positivo, negativo ou cero.

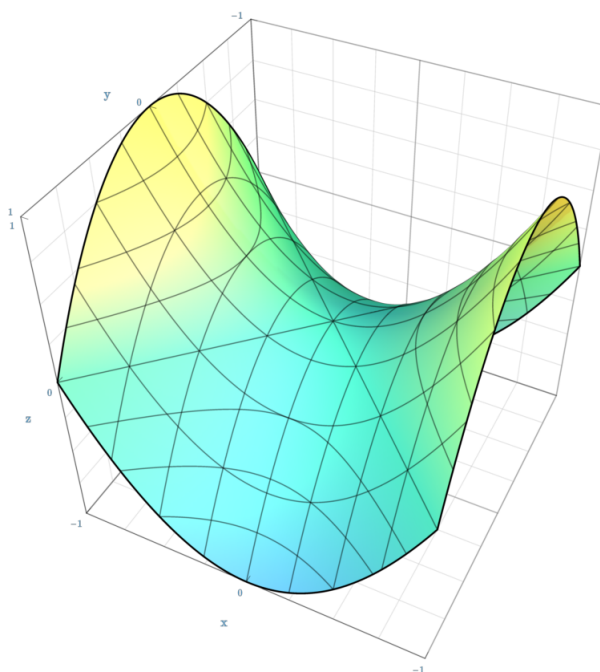
- Se $\mu > 0$, trátase dun *paraboloide elíptico* de ecuación reducida

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = 2z.$$



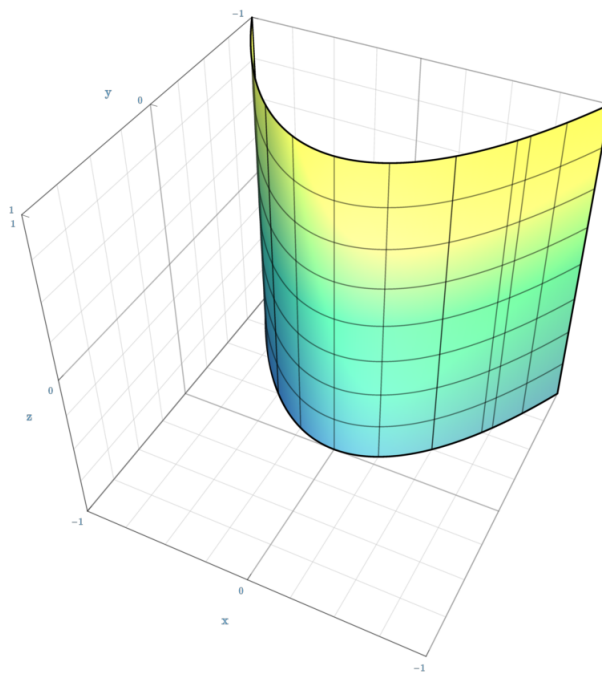
- Se $\mu < 0$, trátase dun *paraboloide hiperbólico* de ecuación reducida

$$\lambda x^2 - \mu y^2 = 2z.$$



- Se $\mu = 0$, trátase dun *cilindro parabólico* de ecuación reducida

$$x^2 = 2z.$$



A seguinte táboa resume os 17 tipos diferentes de cuádricas que existen en dimensión 3.

Exemplo	Nome
$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	Hiperboloide de 2 follas
$x^2 - y^2 + z = 0$	Paraboloide hiperbólico
$x^2 + y^2 + z = 0$	Paraboloide elíptico
$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	Hiperboloide dunha folla
$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	Elipsoide
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	Elipsoide imaxinario
$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Cilindro elíptico
$x^2 - y^2 + 1 = 0$	Cilindro hiperbólico
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Cono
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Punto
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Cilindro imaxinario
$x^2 + y = 0$	Cilindro parabólico
$x^2 - 1 = 0$	Dous planos paralelos
$x^2 - y^2 = 0$	Dous planos
$x^2 + 1 = 0$	Planos imaxinarios
$x^2 + y^2 = 0$	Recta
$x^2 = 0$	Plano dobre

4.4. Clasificación proxectiva das cónicas e das cuádricas

Pasamos agora á clasificación proxectiva das cónicas, na que tamén exploraremos como estudar o caso afín coa óptica proxectiva. Nesta sección realizaremos primeiro a clasificación proxectiva en dimensión 1, 2 e 3, tanto sobre os reais como sobre os complexos, e despois explicaremos como recuperar os resultados afíns. A ferramenta principal que empregaremos será o método de congruencia-pivote para a clasificación de formas cuadráticas.

Por un lado, imos establecer que o método de congruencia-pivote para a clasificación de formas cuadráticas permite realizar a clasificación proxectiva das cuádricas. Ademais, imos realizar a clasificación afín realizando congruencia-pivote non só sobre a cuádriga, senón tamén sobre a intersección da cuádriga co hiperplano do infinito. Estes métodos, porén, non permiten realizar a clasificación métrica, para o cal é preciso proceder como en seccións anteriores.

Clasificación en dimensión 1

Supoñamos que $K = \mathbb{C}$. Podemos pór $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Se $a = 0$, a ecuación queda $y(2bx + cy) = 0$. Tense que ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, polo que en calquera caso $|Q| = \{[1 : 0], [c : -2b]\}$. Se $b \neq 0$, os dous puntos son diferentes. Se $a \neq 0$, entón $(1, 0) \notin Q$, polo que podemos dividir por y e queda $ax^2 + bx + c = 0$, polo que temos dous puntos diferentes. É dicir, se $K = \mathbb{C}$ calquera cuádriga correspóndese ou ben con dous puntos ou ben cun punto dobre.

Se $K = \mathbb{R}$, pode suceder que a ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ non teña solución, polo que ademais das dúas opcións anteriores temos que considerar a situación na que non hai puntos reais.

Clasificación en dimensión 2

No caso proxectivo, que dúas cónicas sexan equivalentes quere dicir que as formas cuadráticas sexan proxectivamente equivalentes. Para iso, podemos proceder aplicando o método de congruencia-pivote, de xeito que sobre os complexos a condición de equivalencia é que o rango sexa o mesmo e sobre os reais que coincidan tanto o rango como o índice, que se define como o mínimo entre o índice de inercia positivo e negativo.

Proposición 4.4.1. Sexa r o rango e i o índice de inercia de Sylvester. Toda cónica de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ é equivalente a unha das seguintes:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, a cónica non dexenerada ($r = 3$).
2. $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = 0$, que corresponde a dúas rectas diferentes ($r = 2$).
3. $x^2 = 0$, unha recta dobre ($r = 1$).

En $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, toda cónica é equivalente a unha das seguintes.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, a cónica non dexenerada imaxinaria, con $(r, i) = (3, 0)$.
2. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, a cónica non dexenerada real, con $(r, i) = (3, 1)$.
3. $x^2 + y^2 = 0$, unha parella de rectas imaxinarias, con $(r, i) = (2, 0)$.
4. $x^2 - y^2 = 0$, dúas rectas diferentes, con $(r, i) = (2, 1)$.
5. $x^2 = 0$, unha recta dobre, con $(r, i) = (1, 0)$.

Demostración. O resultado séguese automaticamente da clasificación das formas cuadráticas e de analizar as diferentes posibilidades que se poden obter ao aplicar o algoritmo de congruencia-pivote. \square

Exemplo. En $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ consideramos as cónicas $q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $q_2(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ e $q_3(x, y, z) = x^2 - yz$. Aplicando congruencia pivote, temos que para todas elas se cumpre que $(r, i) = (3, 1)$, polo que se corresponden coa cónica non dexenerada real. Isto quere dicir que, desde un punto de vista proxectivo, a elipse, a hipérbole e a parábola son equivalentes, isto é, pódese atopar unha proxectividade que transforma unha noutra.

A partir da clasificación proxectiva podemos recuperar a clasificación afín que estudamos na sección anterior. Sexa r_{∞} o rango correspondente á intersección da cónica co hiperplano do infinito. Por exemplo, para estudar as cónicas do espazo afín $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, identificamos este espazo con $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Proposición 4.4.2. Dúas cuádricas en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ son afinmente equivalentes se, e soamente se, son equivalentes en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e as restricións ao hiperplano do infinito tamén son equivalentes. Isto é equivalente a pedir que r e r_{∞} coincidan.

	r	r_{∞}	Exemplo	Nome
1	3	2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Non singular
2	3	1	$x^2 + 2y = 0$	Parábola
3	2	2	$x^2 + y^2 = 0$	Dúas rectas
4	2	1	$x^2 + 1 = 0$	Dúas rectas paralelas
5	1	1	$x^2 = 0$	Recta dobre

O caso da parábola provén de $(r, r_{\infty}) = (3, 1)$, que é a cónica proxectiva $x^2 + 2yz = 0$; pondo $z = 1$, obtemos $x^2 + 2y = 0$.

No caso real, ademais do rango temos que considerar tamén o índice de inercia de Sylvester. A condición de ser afinmente equivalente é que coincidan os índices e os rangos, tanto o global como o correspondente á restrición do hiperplano do infinito.

Proposición 4.4.3. Dúas cuádricas en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ son afinmente equivalentes se, e soamente se, son equivalentes en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e as restricións ao hiperplano do infinito tamén son equivalentes. Isto é equivalente a pedir que (r, i) e (r_{∞}, i_{∞}) coincidan.

A seguinte táboa amosa como realizar a clasificación en función dos rangos e dos índices.

	r	i	r_{∞}	i_{∞}	Exemplo	Nome
1	3	0	2	0	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Elipse imaxinaria
2	3	1	2	0	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Elipse
3	3	1	2	1	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	Hipérbole
4	3	1	1	0	$x^2 + 2y = 0$	Parábola
5	2	0	2	0	$x^2 + y^2 = 0$	Punto
6	2	0	1	0	$x^2 + 1 = 0$	Dúas rectas imaxinarias
7	2	1	2	1	$x^2 - y^2 = 0$	Dúas rectas
8	2	1	1	0	$x^2 - 1 = 0$	Dúas rectas paralelas
9	1	0	1	0	$x^2 = 0$	Recta dobre

Exemplo. Como no exemplo anterior, en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ consideramos as cónicas $q_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $q_2(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ e $q_3(x, y, z) = x^2 - y$. As cónicas proxectivas asociadas son $\bar{q}_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $\bar{q}_2(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ e $\bar{q}_3(x, y, z) = x^2 - yz$. As tres cumpren que $(r, i) = (3, 1)$. As cónicas correspondentes ás restricións ao hiperplano do infinito $z = 0$ son $\tilde{q}_1(x, y) = x^2 + y^2$, $\tilde{q}_2(x, y) = x^2 - y^2$ e $\tilde{q}_3(x, y) = x^2$. A primeira cumpre que

$(r_\infty, i_\infty) = (2, 0)$, polo que se trata dunha elipse; para a segunda, $(r_\infty, i_\infty) = (2, 1)$, polo que é unha hipérbola; finalmente, na terceira, $(r_\infty, i_\infty) = (1, 0)$, que se corresponde cunha parábola.

Polo tanto, o método de congruencia pivote pode empregarse para realizar a clasificación afín ou proxectiva das cónicas e das cuádricas, pero non a clasificación afín. É dicir, que sempre que esteamos interesados nos invariantes métricos das cónicas (diámetro, diretrices, distancia focal, excentricidade...) debemos empregar os métodos descritos en seccións anteriores.

Clasificación en dimensión 3

Proposición 4.4.4. Sexa r o rango e i o índice de inercia de Sylvester. Toda cónica de $\mathbb{P}_\mathbb{C}^3$ é equivalente a unha das seguintes:

1. $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$, a cuádrica non dexenerada, con $r = 4$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, con $r = 3$.
3. $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = 0$, que corresponde a dúas rectas diferentes, con $r = 2$.
4. $x^2 = 0$, unha recta dobre, con $r = 1$.

En $\mathbb{P}_\mathbb{R}^3$, toda cónica é equivalente a unha das seguintes.

1. $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$, non dexenerada imaxinaria, con $(r, i) = (4, 0)$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, non dexenerada non regrada, con $(r, i) = (4, 1)$.
3. $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$, non dexenerada regrada, con $(r, i) = (4, 2)$.
4. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, cono imaxinario cun punto real, con $(r, i) = (3, 0)$.
5. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, cono real, con $(r, i) = (3, 1)$.
6. $x^2 + y^2 = 0$, unha parella de planos imaxinarios, con $(r, i) = (2, 0)$.
7. $x^2 - y^2 = 0$, dous planos diferentes, con $(r, i) = (2, 1)$.
8. $x^2 = 0$, un plano dobre, con $(r, i) = (1, 0)$.

Amosamos agora as diferentes posibilidades para o caso afín, no que se cumpren os mesmos resultados que no caso de cónicas. É dicir, dúas cuádricas son afinamente equivalentes sobre os complexos se, e soamente se, coinciden tanto o rango como o rango da restrición ao hiperplano do infinito (no caso complexo non hai unha nomenclatura estándar para os diferentes tipos de cuádricas).

	r	r_∞	Exemplo
1	4	3	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$
2	4	2	$x^2 + y^2 + 2z = 0$
3	3	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
4	3	2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$
5	3	1	$x^2 + 2z = 0$
6	2	2	$x^2 + y^2 = 0$
7	2	1	$x^2 + 1 = 0$
8	1	1	$x^2 = 0$

Do mesmo xeito, dúas cuádricas son afinmente equivalentes sobre os reais se, e soamente se, coinciden tanto o rango e o índice como o rango e o índice da restrición ao hiperplano do infinito.

	r	i	r_∞	i_∞	Exemplo	Nome
1	4	1	3	1	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	Hiperboloide de 2 follas
2	4	2	2	1	$x^2 - y^2 + z = 0$	Paraboloide hiperbólico
3	4	1	2	0	$x^2 + y^2 + z = 0$	Paraboloide elíptico
4	4	2	3	1	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	Hiperboloide dunha folla
5	4	1	3	0	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	Elipsoide
6	4	0	3	0	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	Elipsoide imaxinario
7	3	1	2	0	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Cilindro elíptico
8	3	1	2	1	$x^2 - y^2 + 1 = 0$	Cilindro hiperbólico
9	3	1	3	1	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Cono
10	3	0	3	0	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Punto
11	3	0	2	0	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Cilindro imaxinario
12	3	1	1	0	$x^2 + y = 0$	Cilindro parabólico
13	2	1	1	0	$x^2 - 1 = 0$	Dous planos paralelos
14	2	1	2	1	$x^2 - y^2 = 0$	Dous planos
15	2	0	1	0	$x^2 + 1 = 0$	Planos imaxinarios
16	2	0	2	0	$x^2 + y^2 = 0$	Recta
17	1	0	1	0	$x^2 = 0$	Plano dobre

Exemplo. Imos considerar dous exemplos.

- Sexa $q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz + 2x + 4z - 1$. Temos que, aplicando congruencia pivote sobre $\bar{q}_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 4z^2 - t^2 + 2xz + 2xt - 4yz + 4zt$, tense que $(r, i) = (4, 2)$. Polo tanto, poderíase tratar dun paraboloide hiperbólico ou dun hiperboloide dunha folla. Considerando entón $\tilde{q}(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz$, temos que $(r_\infty, i_\infty) = (3, 1)$. Trátase dun hiperboloide dunha folla.
- Sexa $q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2x + 2y + 2z - 2$. Aplicando congruencia pivote sobre $\bar{q}_2(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt$ tense que $(r, i) = (3, 1)$. Por outra banda, considerando $\tilde{q}_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz$ temos que $(r_\infty, i_\infty) = (2, 0)$. Trátase dun cilindro (elíptico).

4.5. Estudo particular das cónicas non dexeneradas

A elipse

A elipse é a cónica de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Suporemos que $a \geq b$. Os elementos característicos dunha elipse son os seguintes.

- O *centro*. Na ecuación reducida é o $p = (0, 0)$. En xeral, está caracterizado como a solución da ecuación $Ap + b = 0$.
- Os *eixes*. Son, na ecuación reducida, os eixes $x = 0$ e $y = 0$. Corresponden ás rectas $p + \langle u_1 \rangle$ e $p + \langle u_2 \rangle$, onde u_1 e u_2 son os vectores propios da matriz A .

- Os *vértices*. Son a intersección dos eixes e da elipse, que na ecuación reducida corresponden a $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ e $(0, -b)$. Alternativamente, son os puntos da elipse que maximizan ou minimizan a distancia ao centro.

Definición 4.5.1. Os focos da elipse son os puntos $F_1, F_2 \in \mathbb{E}^2$ que na ecuación reducida teñen coordenadas $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Proposición 4.5.1. Para calquera punto p da elipse, a suma das distancias aos focos é constante:

$$d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a.$$

Reciprocamente, dados dous puntos F_1 e $F_2 \in \mathbb{E}^2$ e unha constante positiva $a > 0$, o lugar xeométrico dos puntos p que cumpren

$$d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a$$

é unha elipse.

Demostración. Sexa (x_0, y_0) un punto da elipse. Hai que demostrar que

$$\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} + \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = 2a.$$

Iso é equivalente a

$$(x_0 - c)^2 + y_0^2 = 4a^2 + (x_0 + c)^2 + y_0^2 - 4a\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2},$$

ou, o que é o mesmo,

$$a\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = a^2 + x_0c.$$

Como os dous membros son positivos, elevamos ao cadrado e resulta, empregando $a^2 - b^2 = c^2$,

$$x_0^2b^2 + y_0^2a^2 = a^2b^2,$$

que é precisamente a ecuación da elipse.

Para ver o recíproco, supoñamos que os focos teñen coordenadas $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, isto é, fixamos como orixe de coordenadas o punto medio e como dirección v_1 a correspondente á recta que os une. Entón, os puntos que cumpren que a suma das distancias entre os focos é unha constante $2a$ é

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Razoando como antes, esta igualdade é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Proposición 4.5.2. Para calquera punto P dunha elipse que non estea aliñado cos focos, a recta normal á elipse que pasa por P biseca o ángulo $\angle F_1PF_2$. En particular, a reflexión de calquera recta que pase por F_1 a través da normal é unha recta que pasa por F_2 .

Demostración. Imos dar dúas demostracións deste resultado, unha analítica (con coordenadas) e outra máis de tipo xeométrico.

No primeiro caso, fixamos un punto arbitrario da elipse, $P = (x_0, y_0)$. Sexa Q o punto de corte da bisectriz de $\angle F_1PF_2$ coa recta F_1F_2 . Polo teorema da bisectriz,

$$\frac{F_1Q}{F_1F_2} = \frac{F_1P}{F_1P + F_2P},$$

polo que

$$Q = \left(-c + \frac{c}{a} \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}, 0 \right).$$

Por outro lado, nun entorno de (x_0, y_0) , se $y_0 \neq 0$, polo teorema da función implícita podemos parametrizar a curva como $(x, y(x))$. Como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y(x)^2}{b^2} = 1$, derivando temos que

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'(x)}{b^2},$$

o que mostra que a pendente da tanxente á elipse en (x_0, y_0) é $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Polo tanto, a normal á elipse en P ten ecuación

$$y = y_0 + \frac{a^2}{b^2} \frac{y_0}{x_0} (x - x_0).$$

O punto de corte con $y = 0$ é $\left(\frac{c^2}{a^2} x_0, 0 \right)$. Polo tanto, o resultado é equivalente a

$$-a^2 + a \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = cx_0;$$

reorganizando termos e elevando ao cadrado (cando ambos membros son positivos), o resultado séguese se, e soamente se,

$$a^2((x_0 + c)^2 + y_0^2) = cx_0 + a^2.$$

Operando, resulta

$$(a^2 - c^2)x_0^2 + a^2c^2 + a^2y_0^2 = a^4,$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Pasamos agora á demostración de tipo xeométrico. O resultado é equivalente a demostrar que a tanxente coincide coa bisectriz exterior. Sexa L o punto da liña PF_1 que está a distancia $2a$ do foco F_1 , co punto P entre F_1 e L . Sexa w a bisectriz exterior de $\angle F_1PF_2$ e consideremos un punto arbitrario $Q \in w$. Pola desigualdade triangular,

$$2a = LF_1 < LQ + QF_1 = F_1Q + QF_2,$$

polo que Q se atopa fóra da elipse. Isto quere dicir que w só corta á elipse nun punto P , polo que ten que ser tanxente. \square

Definición 4.5.2. As directrices dunha elipse son as rectas

$$d_1: x = \frac{a^2}{c}, \quad d_2: x = -\frac{a^2}{c}.$$

Cúmprese a seguinte relación entre os focos e as directrices dunha elipse.

Proposición 4.5.3. Para calquera punto dunha elipse cúmprese que

$$\frac{d(p, F_i)}{d(p, d_i)} = \frac{c}{a}, \quad i = 1, 2.$$

Demostración. Co sistema de referencia habitual, a distancia dun punto arbitrario $p = (x_0, y_0)$ á recta $x = -\frac{a^2}{c}$ é

$$d(p, d_1) = x_0 + \frac{a^2}{c}.$$

Por outro lado,

$$d(p, F_1) = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}.$$

O resultado a demostrar é equivalente a

$$(x_0 + c)^2 + y_0^2 = \frac{x_0^2 c^2}{a^2} + 2x_0 c + a^2,$$

ou, alternativamente, a

$$x_0^2(a^2 - c^2) + a^2 y_0^2 = a^2 b^2,$$

e dividindo por $a^2 b^2$ chégase á ecuación da elipse. □

A hipérbole

A hipérbole é a cónica de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Os elementos característicos dunha hipérbole son os seguintes.

- O *centro*. Na ecuación reducida é o $p = (0, 0)$. En xeral, está caracterizado como a solución da ecuación $Ap + b = 0$.
- Os *eixes*. Son, na ecuación reducida, os eixes $x = 0$ e $y = 0$. Corresponden ás rectas $p + \langle u_1 \rangle$ e $p + \langle u_2 \rangle$, onde u_1 e u_2 son os vectores propios da matriz A .
- Os *vértices*. Son a intersección dos eixes e da hipérbole, que na ecuación reducida corresponden a $(a, 0)$, e $(-a, 0)$.

Definición 4.5.3. Os focos da hipérbole son os puntos $F_1, F_2 \in \mathbb{E}^2$ que na ecuación reducida teñen coordenadas $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

As demostracións das propiedades xeométricas da hipérbole son análogas ás que probamos para a elipse, polo que imos omitir as probas.

Proposición 4.5.4. Para calquera punto p da hipérbole, o valor absoluto da resta das distancias aos focos é constante:

$$|d(p, F_1) - d(p, F_2)| = 2a.$$

Reciprocamente, dados dous puntos F_1 e $F_2 \in \mathbb{E}^2$ e unha constante positiva $a > 0$, o lugar xeométrico dos puntos p que cumpren

$$|d(p, F_1) - d(p, F_2)| = 2a$$

é unha hipérbole.

Demostración. Sexa (x_0, y_0) un punto da hipérbole, con $x_0 > 0$ (o caso $x_0 < 0$ é análogo). Hai que demostrar que

$$\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} - \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = 2a.$$

Iso é equivalente a

$$(x_0 + c)^2 + y_0^2 = 4a^2 + (x_0 - c)^2 + y_0^2 + 4a\sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2},$$

ou, o que é o mesmo,

$$a\sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = -a^2 + x_0c.$$

Como os dous membros son positivos, elevamos ao cadrado e resulta, empregando $a^2 + b^2 = c^2$,

$$x_0^2b^2 - y_0^2a^2 = a^2b^2,$$

que é precisamente a ecuación da hipérbole.

Para ver o recíproco, supoñamos que os focos teñen coordenadas $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, isto é, fixamos como orixe de coordenadas o punto medio e como dirección v_1 a correspondente á recta que os une. Entón, os puntos que cumpren que a resta (en valor absoluto) das distancias entre os focos é unha constante $2a$ é

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Razonando como antes, esta igualdade é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Definición 4.5.4. As directrices dunha hipérbole son as rectas

$$d_1: x = \frac{a^2}{c}, \quad d_2: x = -\frac{a^2}{c}.$$

Para calquera punto dunha hipérbole cúmprese que

$$\frac{d(p, F_i)}{d(p, d_i)} = \frac{c}{a}, \quad i = 1, 2.$$

Ao igual que sucedía antes, temos un resultado sobre as tanxentes á hipérbole nun punto arbitrario.

Proposición 4.5.5. Para calquera punto p da hipérbole, a tanxente a Q en p biseca o ángulo $\angle F_1pF_2$.

Demostración. Sexa $P = (x_0, y_0)$ un punto con $x_0 > 0$ (o caso $x_0 < 0$ é análogo). Por derivación implícita, temos que a pendente da recta tanxente en P é $y' = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Polo tanto, a recta tanxente é

$$r: y = y_0 + \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0);$$

o corte coa recta que une os focos, a $y = 0$, é o punto con coordenada x dada por

$$x = \frac{-a^2y_0^2 + x_0^2b^2}{b^2x_0} = \frac{a^2}{x_0}.$$

Para calcular o punto de corte da bisectriz interior, ao que chamaremos X , observamos que, polo teorema da bisectriz,

$$|F_1X| = \frac{2c \cdot |PF_1|}{|PF_1| + |PF_2|}.$$

Multiplicando numerador e denominador polo valor absoluto de $|PF_1| - |PF_2|$, e empregando que a diferenza das distancias aos focos é constante e igual a $2a$, quedáanos que

$$|F_1X| = \frac{4ac\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}}{4x_0c} = \frac{a\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}}{x_0}.$$

Polo tanto, a coordenada x do punto X é

$$-c + \frac{a\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}}{x_0}.$$

Para comprobar que este valor coincide con $\frac{a^2}{x_0}$, se igualamos as dúas expresións e elevamos ao cadrado, quedáanos que o resultado é equivalente a

$$a^2(c^2 - a^2) = x_0^2b^2 - y_0^2a^2.$$

Empregando que $a^2 + b^2 = c^2$ e dividindo por a^2b^2 , quedáanos que o resultado é equivalente á ecuación da hipérbole, que claramente se cumpre para o punto $P = (x_0, y_0)$. \square

Definición 4.5.5. As asíntotas dunha hipérbole son as rectas s_1 e s_2 de ecuación $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$, que se corresponden coas solucións de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Dicimos que a hipérbole é *equilátera* se as asíntotas son ortogonais, ou, equivalentemente, se $a^2 = b^2$.

Os vectores directores das asíntotas cumpren $v^tAv = 0$, o que permite facer o cálculo sen necesidade de ter a ecuación reducida da hipérbole.

A parábola

A parábola é a cónica de ecuación reducida

$$x^2 - 2by = 0.$$

Os elementos característicos dunha parábola son os seguintes.

- O *centro*. Non ten.
- Os *eixes*. Na ecuación reducida, o eixe $x = 0$ chámase *eixe principal*, e o outro eixe é o $y = 0$. Correspóndense coas rectas $p + \langle u_1$ e $p + \langle u_2$, onde u_1 e u_2 son os vectores propios da matriz A e o eixe principal é o de valor propio 0.
- Os *vértices*. Son a intersección dos eixes e da parábola e só hai un, que na ecuación reducida corresponde ao $(0, 0)$. Está caracterizado por $p \in Q$ e $p^t\tilde{A}u_1 = 0$.

Definición 4.5.6. O *foco* da parábola é o punto $F \in \mathbb{E}^2$ que na ecuación reducida ten coordenadas $F = (0, b/2)$. A *directriz* da parábola é a recta que, coa ecuación reducida, ten ecuación $d: y = -b/2$.

Proposición 4.5.6. Para calquera punto p da parábola cúmprese que

$$\frac{d(p, F)}{d(p, d)} = 1.$$

Demostración. Sexa (x_0, y_0) un punto arbitrario da parábola. Entón,

$$d(p, F) = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - b/2)^2}$$

e

$$d(p, d) = y_0 + \frac{b}{2}.$$

Polo tanto, o enunciado é equivalente a

$$x_0^2 + y_0^2 + b^2/4 - y_0b = y_0^2 + b^2/4 + by_0.$$

Agrupando termos, iso equivale a $x_0^2 = 2by_0$. □

Finalizamos cun resultado análogo aos que establecemos sobre as rectas tanxentes á elipse ou á parábola.

Proposición 4.5.7. As rectas que pasan por F son reflexadas en Q na dirección paralela ao eixe principal (e perpendicular á directriz).

Demostración. Sexa $P = (x_0, y_0)$ un punto arbitrario da parábola. Como a pendente da parábola nese punto é $\frac{x_0}{b}$ podemos identificar o vector tanxente con (b, x_0) . Por outro lado, o vector que une o vértice co punto é o $(x_0, y_0 - b/2)$ e o que o une coa directriz é o $(0, 1)$. Polo tanto, temos que ver que o ángulo que forma o vector (b, x_0) cos outros dous coincide. Para ver a igualdade entre os cosenos chega con ver que

$$\frac{x_0}{\sqrt{b^2 + x_0^2}} = \frac{x_0 \left(\frac{b}{2} + y_0 \right)}{\sqrt{b^2 + x_0^2 x_0^2 + \left(y_0 - \frac{b}{2} \right)^2}}.$$

Operando, iso é equivalente a

$$x_0^2 + \left(y_0 - \frac{b}{2} \right)^2 = \left(\frac{b}{2} + y_0 \right)^2$$

que, á súa vez, equivale a $x_0^2 = 2by_0$. Como os ángulos implicados na comparación están en $[0, \pi]$, a igualdade entre os cosenos é suficiente para concluír. □

Excentricidade

As tres cónicas dexeneradas teñen asociados uns puntos especiais, os focos, e unhas rectas particulares, as directrices, de xeito que se cumpre que os cocientes $\frac{d(p, F)}{d(p, d)}$ é constante. Isto resúmese no seguinte resultado.

Proposición 4.5.8. Dada unha cónica non dexenerada Q , hai un punto F , unha recta d e unha constante $e > 0$ de xeito que, para calquera $p \in Q$, cúmprese que

$$d(p, F) = e \cdot d(p, d).$$

A constante e chámase *excentricidade* da cónica Q . Tense que $e < 1$ se Q é unha elipse; $e = 1$ se Q é unha parábola; e $e > 1$ se Q é unha hipérbole.

4.6. Conxugación e polaridade

Intersección dunha cuádrlica cunha variedade lineal

Sexa $Q = [\varphi]$ unha cuádrlica de \mathbb{P} , sendo $\varphi: E \times E \rightarrow K$ unha forma bilinear simétrica sobre un corpo K .

Proposición 4.6.1. Sexa $L = [F]$ unha variedade lineal proxectiva de \mathbb{P} . Entón, $Q \cap L = L$ ou $Q \cap L = C$, onde $C = [\varphi|F]$ é a cuádrlica de L definida por $\varphi|F$.

Demostración. Se $L \subset Q$, entón a intersección é L . En caso contrario, existe $p = [x]$ e $L = [F]$ de xeito que $p = [x] \notin Q = [\varphi]$. É dicir, $\varphi(x, x) \neq 0$. Sexa $\varphi|F: F \times F \rightarrow K$. Entón, como $\varphi(x, x) \neq 0$, temos que $\varphi|F \neq 0$, polo que $\varphi|F$ define unha cónica en L , $C = [\varphi|F]$. Temos que $C = Q \cap L$, xa que $q = [y] \in Q$ se, e soamente se, $y \in F$ e $\varphi(y, y) = 0$, o que é equivalente a $q \in L \cap Q$. \square

Exemplo. A intersección dunha cuádrlica en dimensión 3 cun plano, se non é baleira, é unha cónica do plano.

Definición 4.6.1. Sexa $Q = [\varphi]$ unha cuádrlica de \mathbb{P} e $L = [F]$ unha recta de \mathbb{P} . Se $K = \mathbb{C}$, hai tres alternativas:

- (a) Se $L \subset Q$, dicimos que L é unha *xeratriz* de Q .
- (b) Se $Q \cap L$ son dous puntos diferentes, dicimos que L é *secante* a Q .
- (c) Se $Q \cap L$ é un punto dobre, dicimos que L é *tanxente* a Q .

No caso doutros corpos, empregamos a mesma notación, aínda que pode suceder que a intersección da recta coa cuádrlica sexa baleira.

Exemplo. Sexa $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - z^2 - t^2$. A recta correspondente ao subespazo $\langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$ está totalmente contida na cuádrlica, polo que é unha xeratriz. Ás cuádrlicas que conteñen rectas chámasele *regradas*. O hiperboloide dunha folla é un exemplo; xunto co paraboloides hiperbólicos, son as únicas cónicas regradas non dexeneradas; outras, como o elipsoide, son cuádrlicas *non regradas*.

Conxugación e polaridade

Sexa $Q = [\varphi]$ unha cuádrlica dun espazo proxectivo \mathbb{P} , e sexa $p = [x]$ un punto. Fixamos unha referencia $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_{n+1}; U\}$ e unha base adaptada $\mathcal{B}_u = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$.

Definición 4.6.2. Dous puntos $A = [x]$ e $B = [y]$ son *conxugados respecto de* $Q = [\varphi]$ se $\varphi(x, y) = 0$. Escribimos $A \sim_Q B$. A definición non depende dos representantes escollidos.

Lema 4.6.1. Sexa $P = [u] \in \mathbb{P}$. Tense que $P \sim_Q P$ se, e soamente se, $\varphi(u, u) = 0$. Á súa vez, isto ocorre se, e soamente se, $P \in Q$.

Demostración. Séguese a partir da definición. \square

Proposición 4.6.2. Sexan $A, B \in \mathbb{P}$ con $A \neq B$, e sexa $AB = A \vee B$.

- (a) Supoñamos que $A, B \in Q$. Entón, $A \sim_Q B$ se, e soamente se, AB é unha xeratriz de Q .

- (b) Supoñamos que $A \in Q$ e $B \notin Q$. Entón, $A \sim_Q B$ se, e soamente se, AB é tanxente a Q en A .
- (c) Supoñamos que $A, B \notin Q$. Entón, $A \sim_Q B$ se, e soamente se, AB é secante a Q en C e D e $(A, B; C, D) = -1$.

Demostración. Consideremos representantes $A = [x]$ e $B = [y]$. Deste xeito, se $U = [x + y]$, temos que $\mathcal{R} = \{A, B; U\}$ é unha referencia de AB . Pomos $a = \varphi(x, x)$, $b = \varphi(x, y)$ e $c = \varphi(y, y)$. Sexa $p = [u] \in AB$, con $u = \lambda x + \mu y$ e de xeito que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Polo tanto,

$$\varphi(u, u) = a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2.$$

Iso quere dicir que as solucións de $\varphi(u, u) = 0$ veñen dadas polos $[u] \in AB$ de xeito que $a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0$, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

- (a) Se $A, B \in Q$ tense que $a = c = 0$, polo que $AB \cap Q$ correspóndese coas solucións de $b\lambda\mu = 0$. Se $A \sim_Q B$, $b = 0$, o que quere dicir que $AB \cap Q = AB$ e, en particular, $AB \subset Q$. Do mesmo xeito, se $AB \subset Q$, entón $b\lambda\mu = 0$ para todo (λ, μ) , polo que se ten que cumprir que $b = 0$.
- (b) Se $A \in Q$ e $B \notin Q$, de xeito que $a = 0$ e $c \neq 0$. Entón,

$$AB \cap Q = \{[\lambda x + \mu y] \in AB \mid \mu(2\lambda b + c\mu) = 0\} = \{[1 : 0], [c : -2b]\}.$$

Polo tanto, $A \sim_Q B$ se, e soamente se, $b = 0$, o que quere dicir que $AB \cap Q = \{[1 : 0]\}$ e AB é tanxente a Q en A .

- (c) Finalmente, supoñamos que $A, B \notin Q$, de xeito que $a \neq 0$ e $c \neq 0$. En particular, se $[u] = [\lambda x + \mu y] \in AB \cap Q$, entón $\lambda, \mu \neq 0$. Pondo $\theta = \lambda/\mu$, temos que os puntos de corte coa cónica son aqueles C e D para os que a coordenada absoluta cumpre que $a\theta^2 + 2b\theta + c = 0$. Polas hipóteses, é sinxelo comprobar que os puntos son diferentes e que ademais $(A, B; C, D) = -1$.

□

Exemplo. Consideramos a cónica proxectiva $q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, que podemos pensar como unha circunferencia ao tomar $z = 0$ como recta do infinito. A tanxente no punto $[0 : 1 : 1]$, que se correspondería co punto afín $(0, 1)$, é a recta

$$(0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y - z = 0.$$

Desde o punto de vista afín, estaríamos dicindo que a tanxente no punto $(0, 1)$ é a recta horizontal $y = 1$.

Consideremos a proxectivización das diferentes cónicas afíns reais non dexeneradas. A diferenza entre elas é que a elipse non corta á recta do infinito; a parábola é tanxente á recta do infinito; mentres que a hipérbole corta á recta do infinito en dous puntos. As tanxentes á hipérbole neses dous puntos son, precisamente, as asíntotas.

Exemplo. Consideramos a cónica $q_2(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ e a súa clausura proxectiva $\bar{q}_2(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$. Os puntos de corte coa recta do infinito son $[1 : 1 : 0]$ e $[1 : -1 : 0]$. A recta tanxente no primeiro é $x - y = 0$ e no segundo $x + y = 0$; estas dúas son as asíntotas.

Definición 4.6.3. A *polar* de p respecto de Q é o conxunto $H_p(Q) = \{q \in \mathbb{P} \mid p \sim_Q q\}$.

Proposición 4.6.3. Sexa P un punto e ω unha cónica. Entón o lugar xeométrico dos conxugados harmónicos de P con respecto de ω é unha recta.

Demostración. Séguese directamente da definición. \square

Definición 4.6.4. Se P é un punto, ω é unha cónica e L é o lugar de tódolos conxugados de P con respecto a ω , dicimos que P é o *polo* da recta L , e L é a *polar* do punto P .

Exemplo. A polar do centro dunha cónica con respecto a ela é a recta do infinito (ou, analogamente, o polo da recta do infinito é o centro da cónica).

Proposición 4.6.4. Sexa ω unha cónica e P e Q dous puntos. Sexan L e M as polares con respecto a ω .

- (a) P está en M se, e soamente se, Q está en L .
- (b) P está en L se, e soamente se, L está en ω , en cuxo caso L é tanxente a ω .
- (c) Se X e Y son os puntos de corte das tanxentes desde P a ω , entón $L = X \vee Y$.

Demostración. As propiedades (a) e (b) son directas a partir da definición. A parte (c) séguese combinando as dúas primeiras. \square

A cuádrlica dual

Imos acabar esta sección introducindo a noción de cuádrlica dual. Sexa $Q = [\varphi]$ unha cuádrlica de \mathbb{P} , onde $\varphi: E \times E \rightarrow K$ é unha forma bilineal simétrica. Sexan \mathcal{R} unha referencia de \mathbb{P} e \mathcal{B}_u unha base adaptada a \mathcal{R} .

Definición 4.6.5. Dada unha cuádrlica $Q = [\varphi]$ de \mathbb{P} , a *cuádrlica dual* de Q é a cuádrlica do espazo dual \mathbb{P}^* definida por $f(Q)$, onde $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}^*$, con $f = [\tilde{\varphi}]$. Os seus puntos son os hiperplanos tanxentes a Q .

4.7. O teorema de Steiner

Formulación clásica do teorema

Teorema 4.7.1 (Steiner). Sexan A e B dous puntos diferentes dun plano proxectivo \mathbb{P} . Sexan A^* e B^* os feixes de rectas polos puntos A e B e $f: A^* \rightarrow B^*$ unha proxectividade. Sexa

$$Q = \{p \in \mathbb{P} \mid \text{existe } L \in A^* \text{ tal que } p = L \cap f(L)\}.$$

Entón Q é unha cónica que contén A e B . Se $f(AB) = AB$, a cónica consta de dúas rectas.

De feito, esta caracterización emprégase ás veces como definición de cónica.

Definición 4.7.1. Unha *cónica no sentido de Steiner* é o lugar xeométrico dos puntos de intersección das rectas homólogas de dous feixes proxectivos no plano.

O seguinte teorema pódese considerar como unha extensión do teorema de Pappus ao caso no que en lugar de considerar dúas rectas se considera unha cónica xeral.

Dadas dúas cónicas C_1 e C_2 de ecuacións $f([x : y : z]) = X^t A X = 0$ e $g([x : y : z]) = X^t B X = 0$, respectivamente, chamamos *feixe de cónicas* ao conxunto ou familia das cónicas que cumpren

$$\alpha f([x : y : z]) + \beta g([x : y : z]) = 0,$$

con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Da definición séguese que as cónicas C_1 e C_2 son da cónica.

Lema 4.7.1. Un punto (real ou imaxinario) de intersección de dúas cónicas é común a tódalas cónicas do feixe que determinan.

En particular, os puntos de intersección das cónicas do feixe denomínanse *puntos base* ou *fixos* do feixe.

Lema 4.7.2. Por un punto que non sexa base do feixe de cónicas pasa unha, e só unha, cónica do feixe.

Proposición 4.7.1. (a) Un feixe de cónicas contén como moito tres cónicas dexeneradas, salvo que estea composto por cónicas todas dexeneradas.

(b) En todo feixe de cónicas non dexenerado existen catro puntos fixos distintos.

Polo tanto, é posible realizar unha clasificación das cónicas segundo a configuración que adopten os puntos fixos, no caso no que as cónicas do feixe non sexan todas elas dexeneradas.

(a) Os catro puntos fixos son distintos. As cónicas do feixe córtanse en catro puntos; temos entón tres cónicas dexeneradas en pares de rectas, determinadas polos tres pares de rectas que pasan polos catro puntos.

(b) Dous puntos fixos son distintos e os outros dous coinciden. Neste caso só hai dúas cónicas dexeneradas. Unha formada pola tanxente ás cónicas non dexeneradas do feixe e pola recta que pasa polos outros tres puntos distintos; e outra formada polas rectas que unen o punto de tanxencia cos outros dous puntos de intersección.

(c) Os puntos fixos coinciden por pares. Neste caso, o feixe contén dúas cónicas dexeneradas. Unha formada pola recta dobre que une os dous puntos, e outra formada polo par de tanxentes ás cónicas non dexeneradas do feixe nos dous puntos fixos distintos.

(d) Tres puntos fixos coinciden e o cuarto é distinto. Aquí o feixe só contén unha cónica dexenerada, que é a recta que une os puntos distintos e a tanxente ás cónicas no punto triple. As cónicas do feixe dise que son *osculatrices*.

(e) Os catro puntos fixos coinciden. Neste caso, o eixe só contén unha cónica dexenerada, formada pola recta dobre tanxente no único punto fixo ás cónicas propias do feixe. Dicimos agora que as cónicas son *hiperosculatrices*.

4.8. Cónicas e razón dobre

Hai dous puntos especiais no plano proxectivo que nos permiten falar de ángulos empregando a razón dobre. Os puntos están no hiperplano do infinito e teñen coordenadas complexas, pero podémolos tratar do mesmo xeito que calquera outro no marco da xeometría proxectiva.

Definición 4.8.1. Os *puntos circulares* son os puntos $I = [i : 1 : 0]$ e $J = [1 : i : 0]$. Estes son os puntos do infinito de pendente $-i$ e i , respectivamente.

Teorema 4.8.1. Se as liñas ℓ_1 e ℓ_2 cortan á recta do infinito nos puntos L e M e α e o ángulo que forman ℓ_1 e ℓ_2 , entón

$$(L, M; I, J) = e^{2i\alpha}.$$

En particular, as rectas son perpendiculares se, e soamente se, $(L, M; I, J)$ é unha cuaterna harmónica.

Demostración. Sexa s a pendente de ℓ_1 e t a pendente da liña m . Temos entón que

$$\tan \alpha = \frac{t - s}{1 + st}.$$

Polo tanto,

$$\begin{aligned} (L, M; I, J) &= (s, t; -i, i) \\ &= \frac{(s+i)^2(t-i)^2}{(s^2+1)(t^2+1)} \\ &= \frac{(st+1)^2 - (t-s)^2 + 2i(t-s)(st+1)}{(st+1)^2 + (t-s)^2} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} + i \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ &= \cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha) \\ &= e^{2i\alpha}. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.8.1. Unha cónica ω é un círculo se, e soamente se, pasa polos puntos I e J .

Demostración. Supoñamos que ω é un círculo de centro (a, b) e radio r . En coordenadas proxectivas, a ecuación é

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = (rz)^2.$$

É inmediato comprobar que $[i : 1 : 0]$ e $[1 : i : 0]$ cumpren a ecuación.

Para o recíproco, supoñamos que ω é unha cónica que pasa por I e J . Sexan A, B, C, D catro puntos de ω . Entón,

$$e^{2i\angle CAD} = (AC, AD; AI, AJ) = (C, D; I, J)_\omega = (BC, BD; BI, BJ) = e^{2i\angle CBD}.$$

Iso quere dicir que os ángulos $\angle CAD$ e $\angle CBD$ con iguais, polo que os puntos A, B, C, D son concíclicos. □

En particular, se A e B son dous puntos dun círculo ω de centro O , entón

$$(A, B; I, J)_\omega = e^{i\angle AOB},$$

polo que temos que A e B son diametralmente opostos se, e soamente se, $(A, B; I, J) = -1$.

Proposición 4.8.2. Sexan A, B, C, D catro puntos nunha cónica, de xeito que $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle COB = 2\beta$, $\angle BOD = 2\gamma$ e $\angle DOA = 2\delta$. Sexa E un punto arbitrario de ω distinto dos catro anteriores. Entón,

$$(EA, EB; EC, ED) = -\frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}}{\frac{\sin \delta}{\sin \gamma}}.$$

En particular,

$$|(EA, EB; EC, ED)| = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|}.$$

Polo tanto, a razón dobre non depende do punto escollido, e cúmprese que

$$(EA, EB; EC, ED) = (FA, FB; FC, FD).$$

Demostración. No caso no que ω é unha circunferencia, o resultado séguese de aplicar o teorema do seno. Se ω é unha cónica arbitraria, podemos transformala nunha circunferencia mediante unha proxectividade, e como se conserva a razón dobre, o resultado segue sendo certo. \square

Teoremas clásicos sobre cónicas

Teorema 4.8.2 (Teorema da bolboreta). Sexa ω unha cónica do plano proxectivo e sexa PQ unha corda de ω . Sexa M un punto da corda PQ , e sexan AB e CD dúas cordas de ω que pasan polo punto M . Sexan $X = AD \cap PQ$ e $Y = BC \cap PQ$. Entón,

$$(P, Q; M, X) = (Q, P; M, Y).$$

Se M é o punto medio de PQ , entón $MX = MY$.

Demostración. Cúmprese a seguinte cadea de igualdades:

$$\begin{aligned} (P, Q; M, X) &= (AP, AQ; AM, AX) \\ &= (P, Q; B, D)_\omega \\ &= (CP, CQ; CB, CD) \\ &= (P, Q; Y, M). \end{aligned}$$

A primeira é consecuencia da definición da razón dobre de catro puntos aliñados e de que as perspectividades conserven a razón simple; a segunda e a terceira, das propiedades da razón dobre dos puntos nunha cónica; e a cuarta, novamente das propiedades das perspectividades. \square

Teorema 4.8.3 (Pascal). Sexa Q unha cónica non dexenerada dun plano proxectivo. Entón, os tres pares de lados opostos dun hexágono inscrito en Q córtanse en puntos aliñados.

Demostración. Sexan A, B, C, D, E e F os 6 puntos que delimitan o hexágono. Sexa $I = AB \cap DE$, $J = BC \cap EF$ e $K = CD \cap FA$. Hai que comprobar que estes tres puntos están aliñados.

Adicionalmente, imos considerar os puntos $X = BC \cap DE$ e $Y = CD \cap EF$. Aplicando as propiedades da razón dobre, temos que

$$\begin{aligned} (I, X, D, E) &= (BI, BX, BD, BE) \\ &= (BA, BC, BD, BE) \\ &= (A, C, D, E)_Q \\ &= (FA, FC, FD, FE) \\ &= (K, C, D, Y) \end{aligned}$$

Observamos agora que a igualdade de razóns sobre $(I, X, D, E) = (K, C, D, Y)$ implica que IK , XC e EY concorren, o que implica que os puntos I , J e K están aliñados. \square

Teorema 4.8.4 (Brianchon). Sexa Q unha cónica non dexenerada dun plano proxectivo. Entón, as diagonais dun hexágono circunscrito a Q son concorrentes.

Demostración. O teorema é consecuencia de aplicar o principio de dualidade ao teorema de Pascal. \square

Inversión

A inversión é unha transformación xeométrica que se define de xeito natural en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, que podemos identificar coa esfera de Riemann ou co plano real co infinito.

Definición 4.8.2. Sexa Γ a circunferencia de centro O e radio R . A inversión é a transformación xeométrica de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que envía un punto $P \neq \{O, \infty\}$ ao punto P' que cumpre que está na semirecta OP (con orixe en O) e que $OP \cdot OP' = R$. Dise que ∞ é o inverso de O e que O é o inverso de ∞ .

Proposición 4.8.3. Sexa ω unha circunferencia con centro O , e sexa $P \neq O$ un punto de ω . Sexa P' o inverso de P con respecto á circunferencia. Entón, a polar de P é a recta que pasa por P' e é perpendicular a OP .

Demostración. Comezamos observando que se temos unha involución dunha recta que fixa exactamente dous puntos A e B , e $C \neq A, B$ e outro punto da recta, entón $(A, B; C, f(C)) = -1$. Sexan X e Y os puntos de corte de OP con ω . A restrición da inversión á recta OP é unha involución diferente da identidade que fixa os puntos X e Y . Polo tanto, tense que $(X, Y; P, P') = -1$. Sexa agora L o punto de corte de OP coa recta do infinito, e M o punto tal que $(I, J; L, M) = -1$. Sexan ℓ, m, o, p as polares de L, M, O e P respectivamente. Como os puntos I e J se corresponden cos puntos de intersección de ω coa liña do infinito, tense que L e M son conxugados con respecto a ω . Polo tanto, $M = o \cap \ell$, ou, alternativamente, $m = OL$. Como P está en m , M ten que estar en p , polo que $p = MP'$. Polo tanto, MP' é perpendicular a OP , e podemos concluír. \square

Imos estudar algunhas aplicacións da inversión á xeometría do triángulo.

Proposición 4.8.4. Sexa ABC un triángulo e sexan D, E e F os puntos de contacto da circunferencia inscrita cos lados BC, CA e AB , respectivamente. A inversión respecto á circunferencia inscrita transforma a circunferencia circunscrita a ABC na circunferencia dos nove puntos de DEF (a circunferencia que pasa polos seus puntos medios e os pés das alturas).

Demostración. Sexa I o incentro do triángulo e X o punto medio de EF , que tamén pertence á recta AI . Tense que $\frac{IX}{IE} = \frac{IE}{IA}$, polo que $IE^2 = IA \cdot IX$ e os puntos A e X son inversos pola inversión centrada en I e de radio igual ao radio da circunferencia inscrita. O mesmo sucede cos pares (B, Y) e (C, Z) , polo que o resultado queda probado. \square

Isto permite establecer o resultado coñecido como *desigualdade de Euler*. Para iso, chega con observar que unha inversión de centro O e radio k , modifica as distancias coa relación

$$|A'B'| = \frac{|AB| \cdot k^2}{|OA| \cdot |OB|}.$$

Proposición 4.8.5. Sexa ABC un triángulo. Denotamos por R e r os radios das circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente, e por O e I os seus centros. Entón,

$$|OI|^2 = R(R - 2r).$$

En particular, $R \geq 2r$.

Polo resultado anterior, a circunferencia circunscrita, de radio R , transfórmase na circunferencia dos nove puntos de DEF , de radio $r/2$. Empregando a fórmula das distancias,

$$\frac{r}{2} = \frac{Rr^2}{R^2 - OI^2}.$$

Manipulando a expresión, tense o resultado buscado.

Demostración. \square

4.9. Da xeometría afín e proxectiva á xeometría alxébrica

Ata o de agora, centrámonos no estudo das variedades lineais afíns e proxectivas, que veñen dadas por sistemas de ecuacións lineais. Por exemplo, unha recta en \mathbb{P}_K^3 escríbese como

$$3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 + x_3 = 0.$$

Posteriormente, estudamos as cónicas e cuádricas, que son hipersuperficies en \mathbb{A}_K^n ou en \mathbb{P}_K^n , isto é, veñen dadas por unha única ecuación polinómica de grao 2.

Estes conceptos admiten extensións naturais. A primeira delas pasa por estudar curvas dadas por polinomios de orde superior, é dicir, elementos de $\mathbb{P}(K_n[x, y])$, o proxectivizado dos polinomios de grao n en dúas variables. O caso máis natural é o seguinte.

Definición 4.9.1. Unha curva cúbica afín é un elemento de $\mathbb{P}(K_3[x, y])$. Unha curva cúbica proxectiva é un elemento no proxectivizado dos polinomios homoxéneos de grao 3 en tres variables, e que polo tanto se pode escribir como

$$p(x, y, z) = ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + exy^2 + fx^2z + gxz^2 + hy^2z + iyz^2 + jxyz.$$

Exemplo. Algúns exemplos de curvas cúbicas son os seguintes:

- $\mathcal{C}_1: y^2 = x^3$. Esta curva non é lisa, senón que presenta unha *cúspide* en $(0, 0)$.
- $\mathcal{C}_2: y^2 = x^3 + x^2$. Esta curva non é lisa, senón que presenta un *nodo* en $(0, 0)$.
- $\mathcal{C}_2: y^2 = x^3 - x$. Esta curva é non singular.

Definición 4.9.2. Unha *curva elíptica* é unha curva proectiva plana non singular con, polo menos, un punto sobre o corpo K .

Se a característica de K é diferente de 2 e de 3, unha curva elíptica sempre se pode escribir como

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3.$$

Neste caso, estase considerando que o punto $O = [0 : 1 : 0]$ é o punto definido sobre K . Se tomamos $y = 0$ como a recta do infinito, a curva afín correspondente é

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

No caso da circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ vimos que era posible parametrizar tódolos puntos considerando as rectas de pendente en K que pasasen polo punto $(-1, 0)$. Isto agora en cambio non é posible, xa que unha recta cortará á cúbica en tres puntos, e que un deles teña coordenadas en K non é suficiente para asegurar que os outros dous tamén. Porén, unha propiedade que comparten a circunferencia e as curvas elípticas, e que non se pode estender para outras curvas, é que é posible definir unha operación sobre elas. Na circunferencia, dados dous puntos $P_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $P_2 = (\cos \beta, \sin \beta)$, podemos definir

$$P_1 + P_2 = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)).$$

Tomando como neutro o punto $(1, 0)$, esta operación define unha estrutura de grupo. No caso da curva elíptica proectiva, procedemos como segue. Sexa $O = [0 : 1 : 0]$, que fará o papel de neutro. Dados dous puntos diferentes P, Q , podemos considerar o punto R , definido como a intersección da recta $P \vee Q$ con C ; a continuación, trazamos a recta OR , que corta nun terceiro punto a curva. Defínese este último punto como $P + Q$. Se $P = Q$, considérase a tanxente.

Proposición 4.9.1. A operación anterior define unha lei de grupo na curva elíptica.

As cúbicas teñen, por razóns históricas, un gran peso no desenvolvemento da xeometría alxébrica. Por exemplo, un caso importante é a *cúbica de Fermat*, que vén dada pola ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0,$$

en $\mathbb{P}^3(K)$. O seguinte resultado é un dos máis coñecidos sobre superficies cúbicas.

Proposición 4.9.2 (Cayley–Salmon). Cada superficie cúbica sobre os complexos contén exactamente 27 liñas.

Ao longo desta sección, sexa E un espazo vectorial de dimensión finita $n \geq 2$ sobre un corpo K . Para un enteiro d con $1 \leq d \leq n$, definimos a Grassmaniana $\text{Gr}(d, E)$ como o conxunto de tódolos subespazos vectoriais de dimensión d de E .

Proposición 4.9.3. Sexa K un corpo finito de q elementos. O número de subespazos de dimensión d de E é

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{d-1})}{(q^d - 1)(q^d - q) \cdots (q^d - q^{d-1})} = \prod_{i=0}^{d-1} \frac{q^n - q^i}{q^d - q^i}.$$

Demostración. En primeiro lugar, vexamos cantos conxuntos de d vectores linealmente independentes podemos formar cos elementos de E . Como primeiro vector v_1 , podemos coller calquera vector non nulo de E , polo que temos $q^n - 1$ posibilidades. Para o

seguinte vector v_2 , temos como única restricción que non pode estar no subespazo xerado por v_1 (se $v_2 \in \langle v_1 \rangle$, v_1, v_2 non serían independentes). Neste subespazo $\langle v_1 \rangle$ atopamos os tv_1 , con $t \in K$, logo, hai un total de q elementos, o que nos deixa $q^n - q$ opcións para v_2 . Proseguindo deste xeito ata o d -ésimo vector, chegamos a que hai $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{d-1})$ conxuntos de vectores linealmente independentes.

Porén, haberá varios deles que representan o mesmo subespazo. Consideramos un subespazo de E de dimensión d e vexamos cantas bases admite. Usando un argumento análogo ao anterior, para o primeiro vector da base temos $q^d - 1$ opcións (calquera vector do subespazo salvo o vector cero), para o segundo hai $q^d - q$ posibilidades, para o terceiro $q^d - q^2$ e así sucesivamente. Afirmamos que hai $(q^d - 1)(q^d - q) \cdots (q^d - q^{d-1})$ bases para cada subespazo de E de dimensión d .

Finalmente, concluímos que o número de subespazos de dimensión d de E é

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{d-1})}{(q^d - 1)(q^d - q) \cdots (q^d - q^{d-1})} = \prod_{i=0}^{d-1} \frac{q^n - q^i}{q^d - q^i}.$$

□

Se $F \subset E$ é un subespazo vectorial de dimensión d e $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_d\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_d\}$ son dúas bases de F , entón existe $\lambda \in K$ diferente de cero e de xeito que

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_d = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_d.$$

Para velo, consideramos o espazo dos tensores d -contravariantes de F , $A^d(F)$. Sabemos que $\dim A^d(F) = \binom{d}{d} = 1$ e, por ser $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_d\}$ unha base de F , $\{v_1 \wedge \dots \wedge v_d\}$ é unha base de $A^d(F)$. Como $u_1 \wedge \dots \wedge u_d \in A^d(F)$, existe $\lambda \in K$ tal que $u_1 \wedge \dots \wedge u_d = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_d$. Ademais, $\lambda \neq 0$, pois se $\lambda = 0$, u_1, \dots, u_d serían dependentes e non constituirían unha base de F .

Sexa agora $A^d(E)$ o espazo vectorial dos tensores d -contravariantes de E . Definimos a aplicación

$$p : \text{Gr}(d, E) \longrightarrow \mathbb{P}(A^d(E)) \quad \{v_1, \dots, v_d\} \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_d,$$

onde $\{v_1, \dots, v_d\}$ é unha base do subespazo de dimensión d . A aplicación p chámase *inclusión de Plücker*.

Proposición 4.9.4. A aplicación p está ben definida e que é inxectiva.

Demostración. En primeiro lugar, é evidente que se v_1, \dots, v_d é unha base dun certo subespazo de dimensión d de E , $v_1 \wedge \dots \wedge v_d \in A^d(E)$. Ademais, $v_1 \wedge \dots \wedge v_d \neq 0$ por ser v_1, \dots, v_d linealmente independentes, logo $[v_1 \wedge \dots \wedge v_d] \in \mathbb{P}(A^d(E))$.

Supoñamos que temos dúas bases $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_d\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_d\}$ dun certo subespazo $F \subset E$ ($F \in \text{Gr}(d, E)$). Polo visto antes, sabemos que existe $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ de xeito que $u_1 \wedge \dots \wedge u_d = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_d$. Polo tanto,

$$p(\{v_1, \dots, v_d\}) = [v_1 \wedge \dots \wedge v_d],$$

$$p(\{u_1, \dots, u_d\}) = [u_1 \wedge \dots \wedge u_d] = [\lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_d] = [v_1 \wedge \dots \wedge v_d],$$

de onde se segue que a aplicación está ben definida.

Para ver que é inxectiva, supoñamos que $p(\{v_1, \dots, v_d\}) = p(\{u_1, \dots, u_d\})$, para $\{v_1, \dots, v_d\}, \{u_1, \dots, u_d\}$ bases de dous subespazos de E . Por hipótese, $[v_1 \wedge \dots \wedge v_d] = [u_1 \wedge \dots \wedge u_d]$, logo existe $\lambda \in K$ non nulo tal que $u_1 \wedge \dots \wedge u_d = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_d$. Por outra banda, se $\mathcal{B}_2^* = \{v_1^*, \dots, v_d^*\}$ representa a base dual de \mathcal{B}_2 , temos a seguinte igualdade:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d(v_{i_1}^*, \dots, v_{i_d}^*) = \begin{cases} 1, & (i_1, \dots, i_d) = (1, \dots, d) \\ 0, & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Logo, como $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d = \lambda v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$,

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_d(v_{i_1}^*, \dots, v_{i_d}^*) = \begin{cases} \lambda, & (i_1, \dots, i_d) = (1, \dots, d) \\ 0, & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Isto implica que $u_i^*(v_j) = \lambda \delta_{ij}$, onde $\mathcal{B}_1^* = \{u_1^*, \dots, u_d^*\}$ é a base dual de \mathcal{B}_1 . Como esta base verifica $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$, se $v_j = a_{j_1}u_1 + \dots + a_{j_d}u_d$, temos que $u_i^*(v_j) = a_{j_i}$, logo $\lambda = a_{j_j}$ e $v_j = \lambda u_j$ para $j = 1, \dots, d$. Como $\lambda \neq 0$, as bases \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 están asociadas ao mesmo subespazo (ao mesmo elemento de $\text{Gr}(d, E)$). \square

Se $v \in E$ e $\omega \in A^d(E)$, dicimos que v divide ω se existen $\eta \in A^{d-1}(E)$ de xeito que $\omega = v \wedge \eta$. É un resultado estándar en álgebra tensorial que v divide ω se, e soamente se, $v \wedge \omega = 0$. Denotamos por D_ω o conxunto de divisores de ω .

Proposición 4.9.5. O elemento $\omega \in A^d(E)$ é totalmente descompoñible se, e soamente se, $\dim(D_\omega) = d$.

Demostración. Supoñamos en primeiro lugar que ω é descompoñible. Logo, existen $v_1, v_2, \dots, v_d \in E$ de maneira que $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_d$. Nese caso, se $\omega \neq 0$, $\{v_1, \dots, v_d\}$ é unha base dun certo espazo $F \subset E$ con $\dim F = d$. Polo teorema de Steinitz, podemos completar $\{v_1, \dots, v_d\}$ a unha base de E , $\{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n\}$. Temos que $\langle v_1, \dots, v_d \rangle \subset D_\omega$, xa que, para $i \in \{1, \dots, d\}$, $v_i \wedge \omega = 0$. Ademais, non hai máis divisores de ω , pois se $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ é divisor de ω , verificase

$$0 = v \wedge \omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \sum_{i=d+1}^n \alpha_i v_i \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d.$$

Como temos unha combinación lineal de elementos linealmente independentes en $A^{d+1}(E)$ igualada de 0, necesariamente $\alpha_i = 0$ para $i = d+1, \dots, n$. Chegamos a que $v = \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i \in \langle v_1, \dots, v_d \rangle$.

Para ver a outra implicación, sexan $\omega \in A^d(E)$, $D_\omega = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$ e $\{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n\}$ unha completación a unha base de E . Probemos que ω é totalmente descompoñible. Unha posible base de $A^d(E)$ sería $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n\}$. Logo, existen $\binom{n}{d}$ coeficientes en K de modo que

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d} \alpha_{i_1 \dots i_d} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}.$$

Como $v_1 \in D_\omega$, temos que $v_1 \wedge \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d} \alpha_{i_1 \dots i_d} v_1 \wedge v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} = 0$, logo $\alpha_{i_1 \dots i_d} = 0$ se $1 \notin \{i_1, \dots, i_d\}$, pois estaríamos ante unha combinación lineal de elementos linealmente independentes en $A^{d+1}(E)$ igualada a cero. Analogamente para v_2 , de $v_2 \wedge \omega = 0$ deducimos $\alpha_{i_1 \dots i_d} = 0$ cando $2 \notin \{i_1, \dots, i_d\}$. Iterando o proceso, chegamos a que $\alpha_{i_1 \dots i_d} = 0$ se $\{1, \dots, d\} \neq \{i_1, \dots, i_d\}$. Logo, quedáanos unicamente $\omega = \alpha_{1 \dots d} v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ e ω é totalmente descompoñible. \square

Finalmente, podemos establecer o seguinte resultado.

Proposición 4.9.6. O elemento $[\omega] \in \mathbb{P}(A^d(E))$ pertence á imaxe da Grassmaniana ao aplicarmos a inclusión de Plücker se, e soamente se, ω descompón completamente.

Demostración. Se $[\omega] = p(\{v_1, \dots, v_d\})$ pertence á imaxe da Grassmaniana, entón $[\omega] = [v_1 \wedge \dots \wedge v_d]$ e $\omega = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ para un certo $\lambda \in K$. Logo, ω é totalmente descompoñible.

Reciprocamente, sexa $[\omega] \in \mathbb{P}(A^d(E))$, con ω un tensor descompoñible. Isto quere dicir que existen v_1, \dots, v_d vectores de E de xeito que $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$. Deste xeito, $[\omega] = [v_1 \wedge \dots \wedge v_d] = p(\{v_1, \dots, v_d\})$ pertence á imaxe da Grassmaniana. \square

Exemplo. Supoñamos agora que E ten dimensión 4 e $d = 2$. Neste caso, $\mathbb{P}(A^2(E))$ ten dimensión 5. Sexa $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ unha base de E . Logo, $\{v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_1 \wedge v_4, v_2 \wedge v_3, v_2 \wedge v_4, v_3 \wedge v_4\}$ é unha base de $A^2(E)$. Por estarmos ante tensores 2-contravariantes, temos que ω é un tensor descompoñible se, e soamente se, $\omega \wedge \omega = 0$. Polo apartado anterior, temos que $[\omega] \in \mathbb{P}(A^2(E))$ pertence á imaxe da Grassmaniana se, e só se, ω é descompoñible, isto é, se $\omega \wedge \omega = 0$.

Por outra banda, dado un elemento $\omega = a_{12}v_1 \wedge v_2 + a_{13}v_1 \wedge v_3 + a_{14}v_1 \wedge v_4 + a_{23}v_2 \wedge v_3 + a_{24}v_2 \wedge v_4 + a_{34}v_3 \wedge v_4$, a condición $\omega \wedge \omega = 0$ é equivalente a:

$$2(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4 = 0.$$

Como $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4$ é un elemento non nulo de $A^2(E)$, necesariamente $a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$. Obtemos así a ecuación cuadrática que describe o conxunto $\text{Gr}(2, E)$.

Máis en xeral, sexa $K[X_1, \dots, X_n]$ o anel de polinomios en n variables, é dicir, combinacións lineais de termos da forma $X_1^{a_1}, \dots, X_n^{a_n}$. Dado $f \in K[X_1, \dots, X_n]$, podémoslo ver como unha aplicación que vai do espazo afín \mathbb{A}_K^n e K , e ten sentido considerar o seu conxunto de ceros.

Definición 4.9.3. Se $S \subset K[X_1, \dots, X_n]$ é un conxunto de polinomios, definimos

$$V(S) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } f \in S\}.$$

Se $W \subset \mathbb{A}_K^n$ é tal que $W = V(S)$ para algún $S \subset K[X_1, \dots, X_n]$, dicimos que W é unha *variedade afín*. Un polinomio de grao m dise que é *homoxéneo de grao m* se $f(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda^m f(a_1, \dots, a_n)$ para todo $\lambda \in K^\times$. Unha *variedade proxectiva* é un subconxunto $W \subset \mathbb{P}^n$ de xeito que $W = V(S)$ para algunha colección de polinomios homoxéneos $S \subset K[X]$.

Proposición 4.9.7. Tense que $\text{Gr}(d, E)$ é unha variedade proxectiva.

Demostración. Consideramos a aplicación $\varphi : A^d(E) \longrightarrow \text{Hom}(E, A^{d+1}(E))$ que leva cada $\omega \in A^d(E)$ no homomorfismo $\varphi(\omega) : E \longrightarrow A^{d+1}(E)$, con $\varphi(\omega)(v) = \omega \wedge v$ para cada $v \in E$.

Vexamos que φ é unha aplicación lineal. Para comprobalo, consideramos $\omega_1, \omega_2 \in A^d(E)$. Temos que $\varphi(\omega_1 + \omega_2)(v) = (\omega_1 + \omega_2) \wedge v$, que, pola linealidade do produto exterior, coincide con $\omega_1 \wedge v + \omega_2 \wedge v = \varphi(\omega_1)(v) + \varphi(\omega_2)(v)$. A aplicación tamén respecta o produto por escalares, xa que se $\lambda \in K$ e $\omega \in A^d(E)$, entón $\varphi(\omega)(\lambda v) = (\lambda \omega) \wedge v = \lambda(\omega \wedge v) = \lambda \varphi(\omega)$.

Ademais, φ é tamén unha aplicación inxectiva, pois se $\varphi(\omega) = 0$, temos que $\omega \wedge v = 0$ para calquera $v \in E$, e isto só pode ocorrer se $\omega = 0$.

Deste xeito, podemos identificar o homomorfismo $\varphi(\omega)$ coa matriz asociada a el, que terá $\dim A^{d+1}(E) = \binom{n}{d+1}$ filas e $\dim E = n$ columnas.

Podemos comprobar que $[\omega] \in \mathbb{P}(A^d(E))$, $[\omega] = p(\{u_1, \dots, u_d\}) = [u_1 \wedge \dots \wedge u_d]$ se, e soamente se, $\varphi(\omega)$ ten rango menor ou igual que $n - d$. En efecto, vimos antes que

$[\omega] \in \mathbb{P}(A^d(E))$ equivale a $\dim D_\omega = d$, que quere dicir que para todo $v \in D_\omega$, $v \wedge \omega = \varphi(\omega) = 0$. Polo tanto, se consideramos unha base de E formada a partir dunha base de D_ω , teremos que a matriz asociada a $\varphi(\omega)$ terá polo menos $n - d$ columnas nulas (as imaxes por $\varphi(\omega)$ dos d elementos de D_ω). Podemos traducir esta condición sobre o rango de $\varphi(\omega)$ nun sistema de ecuacións homoxéneo, xa que todos os menores da matriz de $\varphi(\omega)$ de orde $n - d + 1$ serán nulos. Deste modo, obtemos un conxunto de polinomios homoxéneos de grao $n - d + 1$ igualados a cero que caracterizan o conxunto $\text{Gr}(d, E)$, que é polo tanto unha variedade proxectiva. \square

Falta: expandir esta última parte e, sobre todo, falar da correspondencia entre álgebra e xeometría (ideais e variedades).

4.10. Problemas

Problema 4.1. Clasificar as seguintes cónicas de \mathbb{E}^2 e atopar en cada caso a ecuación reducida e a referencia adaptada.

- (a) $x^2 + y^2 + 2xy - 2y + x + 1 = 0$.
- (b) $4x^2 - 2xy + y^2 - 14x + 2y + 13 = 0$.
- (c) $2x^2 + 4y^2 - 4xy - 2x - 8y + 9 = 0$.
- (d) $2x^2 - 3xy - 2x + 5y - 3 = 0$.
- (e) $y^2 - 2xy + 4y - 2x + 3 = 0$.

Solución. (a) A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 1/2 & -1 & 1 \end{array} \right);$$

a cónica non ten centro, xa que o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é incompatible. Polo tanto, trátase dunha parábola. Para achar o vértice $P = (x, y)$, usamos que o vector propio de valor propio non nulo da parte cuadrática é o $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Queda entón o sistema

$$(x \ y \ | \ 1) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 1/2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Polo tanto, $x + y = \frac{1}{4}$. Cambiando $y = \frac{1}{4} - x$ na ecuación da cónica, obtemos que $x = -3/16$ e $y = 7/16$, polo que $P = (-3/16, 7/16)$. Finalmente, temos que

$$\alpha = (x \ y \ | \ 1) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 1/2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Isto quiere dicir que na referencia dada por $\{v_1, v_2; P\}$, con $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, tense que a ecuación reducida é

$$x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}y = 0.$$

(b) A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & 13 \end{array} \right);$$

o seu centro é $P = (2, 1)$, o valor no centro é 0, e unha referencia ortonormal obtense ao coller vectores propios unitarios $\{v_1, v_2\}$ da parte cuadrática. Os valores propios son $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$, que son ambos positivos. A ecuación na referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2; P\}$ é

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2}x^2 + \frac{5 - \sqrt{13}}{2}y^2 = 0,$$

polo que se trata dun punto (dúas rectas imaxinarias que se cortan nun punto real). O punto é o centro, o $(2, 1)$.

(c) A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 9 \end{array} \right);$$

o seu centro é $P = (3, 5/2)$, e o valor da cónica en P é -4 . Os valores propios da parte cuadrática son $3 \pm \sqrt{5}$, e podemos considerar unha base de vectores propios unitarios $\{v_1, v_2\}$. Na referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2; P\}$, a ecuación é

$$(3 + \sqrt{5})x^2 + (3 - \sqrt{5})y^2 = 4,$$

polo que se trata dunha elipse.

(d) A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3/2 & -1 \\ -3/2 & 0 & 5/2 \\ -1 & 5/2 & -3/2 \end{array} \right);$$

o centro é $P = (-5/3, -14/9)$ e o valor no centro é $-29/3$. Os valores propios da parte cuadrática son $\frac{2 \pm \sqrt{13}}{2}$, polo que collendo unha base de vectores propios unitarios $\{v_1, v_2\}$ da parte cuadrática, temos que na referencia $\{v_1, v_2; P\}$ a ecuación é

$$\frac{2 + \sqrt{13}}{2}x^2 + \frac{2 - \sqrt{13}}{2}y^2 = \frac{29}{3},$$

polo que se trata dunha hipérbole.

(e) A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{array} \right);$$

o centro é $P = (-1, 1)$ e o valor da cónica no centro é $d = 12$. Os valores propios da parte cuadrática son $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, de xeito que un é positivo e o outro negativo. Polo tanto, a ecuación reducida é

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}y^2 = -12,$$

polo que se trata de novo dunha hipérbole.

Problema 4.2. Clasificar as seguintes cuádricas de \mathbb{E}^3 e atopar en cada caso a ecuación reducida e a referencia adaptada.

(a) $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz + 16z + 16 = 0$.

(b) $3x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 2xz + 8y - 16 = 0$.

(c) $3x^2 + y^2 - 4xz + 2y - 4z + 4 = 0$.

(d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

(e) $2y^2 - 2yz + xy - xz + x + 3y - z + 1 = 0$.

Solución. (a) A matriz da cuádrica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{array} \right),$$

polo que o centro é o punto $P = (-1, 0, -3)$ e o valor no centro é -8 . O polinomio característico da parte cuadrática é $-(X - 2)^2(X - 4)$. Unha base ortonormal de vectores propios vén dada por $v_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, polo que a ecuación reducida en $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3; P\}$ é

$$2x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8.$$

Trátase polo tanto dun elipsoide.

(b) A matriz da cuádrica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -16 \end{array} \right),$$

polo que o centro é o punto $P = (0, 2, 0)$ e o valor no centro é -8 . Os valores propios son -2 , 2 e 4 , e os vectores propios correspondentes son $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ e $v_3 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Na referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3; P\}$, a ecuación reducida é

$$-2x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8,$$

polo que se trata dun hiperboloide dunha folla.

(c) A matriz da cuádrica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right),$$

polo que o centro é o punto $P = (-1, -1, -3/2)$ e o valor no centro é $+6$. Os valores propios da parte cuadrática son $-1, 1$ e 4 . Os vectores propios asociados son $v_1 = (1/\sqrt{5}, 0, 2/\sqrt{5})$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5})$. A ecuación na referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3; P\}$ é

$$-x^2 + y^2 + 4z^2 = -6,$$

ou, alternativamente,

$$x^2 - y^2 - 4z^2 = 6,$$

polo que se trata dun hiperboloide de dúas follas.

(d) A matriz da cuádrica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right),$$

e calquera punto da forma $(-1, t, -1-t)$ é un centro; sexa P un punto arbitrario desa recta, por exemplo, o $(-1, 0, -1)$. O valor da cuádrica en P é -4 . Os valores propios da parte cuadrática son $2, 1, 0$, e unha base de vectores propios ortonormal vén dada por $v_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $v_2 = (1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Na referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3; P\}$, a ecuación reducida é

$$2x^2 + y^2 = 4,$$

polo que se trata dun cilindro elíptico.

(e) A matriz da cuádrica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1/2 \\ \hline 1/2 & 3/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right),$$

polo que calquera punto da recta $(t, -t/2 - 1/2, -t/2 + 1/2)$ é un centro; sexa $P = (1, -1, 0)$ un deses puntos. O valor da cuádrica en P é 0 . Os valores propios da parte cuadrática son $\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$ e 0 . Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é unha base ortonormal de vectores propios, temos que na referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3; P\}$, a ecuación é

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0,$$

e como os signos de λ_1 e λ_2 son diferentes, temos que a cuádrica correspóndese con dous planos que se cortan.

Problema 4.3. Dada a cónica

$$(x-1)(y-1) = -2,$$

encontrar as coordenadas dos seus focos na referencia canónica e a súa excentricidade.

Solución. A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 3 \end{array} \right);$$

o seu centro é $P = (1, 1)$ e o valor no centro é $d = 2$. Os valores propios da parte cuadrática son $-1/2$ e $1/2$, e os vectores propios unitarios correspondentes son $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $v_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Na referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2; P\}$, a ecuación é $-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = -2$, que se pode reescribir como

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Trátase entón dunha hipérbole con $a = b = 2$, polo que $c = 2\sqrt{2}$ e a excentricidade é $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$. As coordenadas dos focos son $P \pm c \cdot v_1$, polo que queda $F_1 = (3, -1)$ e $F_2 = (-1, 3)$.

Problema 4.4. Nos seguintes apartados, atopar a ecuación da hipérbole de \mathbb{E}^2 que cumpre as condicións indicadas:

- (a) Pasa polo punto $(2, 5)$ e ten por asíntotas as rectas $y + 2 = 0$ e $x - y = 1$.
- (b) Pasa polo punto $(2, 1)$, ten por asíntota a recta $y = 3x - 2$ e é tanxente á recta $x - y + 1 = 0$ no punto $(2, 3)$.

Solución. (a) A ecuación da hipérbole é da forma $(x - y - 1)(y + 2) = c$. Impondo que o punto $(2, 5)$ pertenza á hipérbole, temos que $-4 \cdot 7 = -28$, polo que a ecuación é

$$xy - y^2 + 2x - 3y + 26 = 0.$$

- (b) Supoñamos que a outra hipérbole é da forma $y + \alpha x + \beta = 0$; isto pódese supoñer xa que senón sería da forma $x + k$, e unha comprobación rutineira amosa que non é posible. Polo tanto, temos que a ecuación é da forma

$$(y - 3x - 2)(y + \alpha x + \beta) = \gamma.$$

Impondo que pase polos puntos $(2, 1)$ e $(2, 3)$, temos que

$$3 + 6\alpha + 3\beta + \gamma = 0, \quad 3 + 2\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Polo tanto, $\gamma = -3$ e $2\alpha + \beta = 0$. Polo tanto, a ecuación queda

$$(y - 3x + 2)(y + \alpha x - 2\alpha) = -3.$$

No punto $(2, 3)$, a pendente é $y' = 1$, polo que mediante derivación implícita obtemos que

$$(y' - 3)(y + \alpha x - 2\alpha) + (y - 3x + 2)(y' + \alpha) = 0.$$

Como $y' = 1$, ten que suceder que $-6 - (1 + \alpha) = 0$, o que quere dicir que $\alpha = -7$ e a ecuación da hipérbole é

$$(y - 3x + 2)(y - 7x + 14) = -3.$$

Problema 4.5. Dada unha hipérbole C , demostrar que hai exactamente 4 puntos $p \in C$ desde os cales se ven os focos de C con ángulo recto.

Solución. Consideramos a hipérbole na ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Os focos son os puntos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, polo que hai que buscar os puntos P que cumpren $\angle F_1 P F_2 = \pi/2$. Iso é equivalente a dicir que P pertenza á circunferencia que ten por diámetro $F_1 F_2$, isto é, á circunferencia $x^2 + y^2 = c^2$. Polo tanto, trátase de resolver o sistema

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^2 + y^2 = c^2.$$

As solucións son

$$P_1 = \left(\frac{a}{c} \sqrt{b^2 + c^2}, \frac{b^2}{c} \right), P_2 = \left(\frac{a}{c} \sqrt{b^2 + c^2}, -\frac{b^2}{c} \right),$$

$$P_3 = \left(-\frac{a}{c} \sqrt{b^2 + c^2}, \frac{b^2}{c} \right), P_4 = \left(-\frac{a}{c} \sqrt{b^2 + c^2}, -\frac{b^2}{c} \right).$$

Problema 4.6. En \mathbb{E}^2 consideramos as cónicas

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 12x - 20y + 12 = 0.$$

- Demstrar que se $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é unha afinidade bixectiva tal que $f(C_1) = C_1$, entón f é un movemento.
- Encontrar xustificadamente tódalas afinidades bixectivas f que deixan invariante C_1 , escribindo as súas ecuacións na referencia ordinaria de \mathbb{E}^2 .
- Encontrar unha afinidade bixectiva $g : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que $g(C_2) = C_1$, dando as súas ecuacións en referencia ordinaria.
- Encontrar tódalas afinidades bixectivas $h : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tales que $h(C_2) = C_1$, dando as súas ecuacións en referencia ordinaria.

Solución. (a) Comezamos observando que se $f(C_1) = C_1$, entón f fixa o centro de C_1 , que é o $(0, 0)$. Escribimos agora $f(1, 0) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $f(0, 1) = (\cos \beta, \sin \beta)$. Entón, para calquera parella (x, y) de xeito que $x^2 + y^2 = 1$, tense que cumprir que $|f(x, y) - (0, 0)|^2 = 1$. Isto é equivalente a esixir que, nese caso

$$\begin{aligned} 1 &= (x \cos \alpha + y \cos \beta)^2 + (x \sin \alpha + y \sin \beta)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xy(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 1 + 2xy \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Polo tanto, cúmprese que $\alpha - \beta = \pm\pi/2$.

Se $\beta = \alpha + \pi/2$, entón a matriz da afinidade é

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

se $\beta = \alpha - \pi/2$, a matriz é

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Nos dous casos trátase da matriz dun movemento, xa que a parte lineal é unha isometría.

- (b) A primeira das matrices correspóndese cun xiro de ángulo α ; a segunda correspóndese cunha simetría axial con respecto á recta

$$(\cos \alpha - 1)x + (\sin \alpha)y = 0.$$

- (c) A matriz da cónica C_2 é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & -10 \\ \hline -6 & -10 & 12 \end{array} \right);$$

o seu centro é $P = (0, 2)$, e o valor no centro é -8 . Como os valores propios da parte cuadrática son $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$, e os vectores propios $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $v_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, a ecuación na referencia $\mathcal{R} = \{v_1, v_2; P\}$ é

$$2x^2 + 8y^2 = 8,$$

o que quere dicir que $a = 2$ e $b = 1$. Polo tanto, a aplicación g ten que cumprir o seguinte:

- $g(0, 2) = (0, 0)$;
- $\tilde{g}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (1, 0)$; é dicir, o eixe maior da elipse mándase a un eixe arbitrario da circunferencia.
- $\tilde{g}(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (0, 1)$; isto é, o eixe menor vai a un vector perpendicular ao anterior.

Polo tanto, $\tilde{g}(1, 0) = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ e $\tilde{g}(0, 1) = (-\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$. Finalmente, $g(0, 0) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$.

- (d) Sexa h unha afinidade bixectiva tal que $h(C_2) = C_1$. Como $g(C_2) = C_1$, temos que $h(g^{-1}(C_1)) = C_1$, polo que $h \circ g^{-1} = f$, onde f é un movemento que fixa C_1 , como os descritos no apartado (b). Polo tanto, $h = f \circ g$, polo que calquera afinidade é a composición da aplicación g descrita no apartado anterior e un movemento f .

Problema 4.7. Determinar os movementos de \mathbb{E}^2 que deixan invariante a cónica $2x^2 + 4xy - y^2 - 24 = 0$.

Solución. A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 24 \end{array} \right);$$

o seu centro é $P = (0, 0)$ e o valor no centro é $d = -24$. Os valores propios da parte cuadrática son 3 e -2 , polo que se trata dunha hipérbole. Se $v_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ e

$v_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ son os vectores propios (unitarios), temos que un movemento ten que preservar o centro e tamén os eixes $P + \langle v_1 \rangle$ e $P + \langle v_2 \rangle$. Polo tanto, os movementos son (na referencia adaptada), os catro da forma

$$\left(\begin{array}{cc|c} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Para atopar a expresión na referencia canónica, aplicamos un cambio de coordenadas; por exemplo, o correspondente a $\tilde{f}(v_1) = v_1$ e $\tilde{f}(v_2) = -v_2$ escríbese, na base canónica, como

$$\left(\begin{array}{cc|c} \pm 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & \pm 3/5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Problema 4.8. Atopar os elementos característicos da cónica que se obtén seccionando o elipsoide de \mathbb{E}^3 de ecuación $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6x + 6z = 0$ co plano $x + z = 0$.

Solución. Podemos comprobar en primeiro lugar que a cuádrica se trata dun elipsoide: a matriz é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ \hline -3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right),$$

polo que o centro da cónica é o punto $(1, 0, -1)$, no que o valor é -6 . Considerando o sistema de referencia centrado nese punto e cos mesmos vectores, a ecuación é $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, polo que é efectivamente un elipsoide.

Ao pormos $z = -x$, quédanos a cónica

$$3x^2 + y^2 - 6x = 0,$$

que se pode reescribir como

$$\frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1.$$

Como $\sqrt{3} > 1$, temos que $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ e $c = \sqrt{2}$. É polo tanto unha elipse centrada no punto $(1, 0)$ con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$ e $(1, -\sqrt{3})$. Os seus focos están nos puntos $(1, \sqrt{2})$ e $(1, -\sqrt{2})$. As diretrices son as rectas $y = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$ e a excentricidade é $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Se volvemos agora a dimensión tres, temos que os focos son os puntos $(1, \sqrt{2}, -1)$ e $(1, -\sqrt{2}, -1)$, mentres que o centro é o $(1, 0, -1)$ e os vértices son $(0, 0, 0)$, $(2, 0, -2)$, $(1, \sqrt{3}, -1)$ e $(1, -\sqrt{3}, -1)$.

Problema 4.9. Consideramos a cuádrica afín non singular

$$\mathcal{C}: 3x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz + 8x - 4y + 12z + 4$$

e o punto $P = (-2, 1, 1)$.

- Clasificar a cónica \mathcal{C} .
- Atopar as familias de rectas xeratrices.

- (c) Atopar dúas rectas que pasen polo punto P .
- (d) Comprobar que as rectas do apartado anterior xeran o plano tanxente de \mathcal{C} no punto P .
- (e) Repetir o exercicio coa cuádrlica

$$\mathcal{C}' : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2yz + 2x - 4z - 4$$

e o punto $P = (0, 1, -1)$.

Solución. (a) A matriz da cuádrlica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & 6 \\ \hline 4 & -2 & 6 & 4 \end{array} \right).$$

Trátase dunha cónica sen centro, na que os valores propios da parte cuadrática son 0, $\frac{3(1+\sqrt{17})}{2}$ e $\frac{3(1-\sqrt{17})}{2}$. Como os que son non nulos teñen distinto signo, trátase dun parabolóide hiperbólico.

- (b) Sexa (x_0, y_0, z_0) un punto da cuádrlica. Entón, a recta $(x_0, y_0, z_0) + \langle (a, b, c) \rangle$ é unha xeratriz se, e soamente se, $(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) \in \mathcal{C}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Igualando os termos en t e en t^2 a 0 temos que

$$\begin{aligned} (6x_0 - 4y_0 + 8z_0 + 8)a + (-8y_0 - 4x_0 - 4)b + (8z_0 + 8x_0 + 12)c &= 0 \\ 3a^2 - 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 8ac &= 0. \end{aligned}$$

Podemos escribir

$$3a^2 - 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 8ac = (a - 2b + 2c)(3a + 2b + 2c),$$

polo que temos dúas rectas xeratrices para cada punto: as que están definidas pola primeira ecuación e polo resultado de considerar cada un dos factores da segunda.

- (c) Seguindo o procedemento anterior, temos que unha recta vén de resolver

$$\begin{aligned} -4b + 4c &= 0 \\ a - 2b + 2c &= 0, \end{aligned}$$

polo que é a recta $r_1 : (-2, 1, 1) + \langle (0, 1, 1) \rangle$. A outra vén de resolver

$$\begin{aligned} -4b + 4c &= 0 \\ 3a + 2b + 2c &= 0, \end{aligned}$$

polo que se corresponde con $r_2 : (-2, 1, 1) + \langle (-4, 3, 3) \rangle$.

- (d) O plano tanxente no punto P é

$$(x \ y \ z \ 1) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & 6 \\ \hline 4 & -2 & 6 & 4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2y + 2z = 0.$$

Isto pódese reescribir como $y - z = 0$. Os vectores $(0, 1, 1)$ e $(-4, 3, 3)$ pertencen ao subespazo director do plano, e como son linealmente independentes, son tamén xeradores.

(e) A matriz da cuádrica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right).$$

A cónica ten centro, que é o punto $(-2, 1, -1)$, e o valor nel é -4 . Os valores propios da parte cuadrática son $1 + \sqrt{2}$, 1 e $1 - \sqrt{2}$. Polo tanto, a forma reducida é

$$(1 + \sqrt{2})x^2 + y^2 + (1 - \sqrt{2})z^2 = 4,$$

e trátase dun hiperboloide dunha folla.

Sexa (x_0, y_0, z_0) un punto da cuádrica. Entón, a recta $(x_0, y_0, z_0) + \langle (a, b, c) \rangle$ é unha xeratriz se, e soamente se, $(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) \in \mathcal{C}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Igualando os termos en t e en t^2 a 0 temos que

$$\begin{aligned} (2x_0 - 2z_0 + 2)a + (2y_0 + 2z_0)b + (2z_0 - 2x_0 + 2y_0 - 4)c &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2ac + 2bc &= 0. \end{aligned}$$

A diferenza do caso anterior, a ecuación cuadrática non factoriza e achar a expresión explícita non é tan doado (aínda que se pode facer). En calquera caso, trátase da ecuación dunha recta cunha cónica, que se cortarían en dous puntos reais.

No caso do punto $(0, 1, -1)$, a recta é simplemente $a = c$, polo que o corte coa cónica virá dado polas solucións de $b^2 + 2bc = b(b + 2c) = 0$. Se $b = 0$, temos entón que a xeratriz é a recta $(0, 1, -1) + \langle (1, 0, 1) \rangle$. Se $b + 2c = 0$, temos que a xeratriz é a recta $(0, 1, -1) + \langle (1, -2, 1) \rangle$. O plano tanxente é $x - z - 1 = 0$, polo que as dúas xeratrices están contidas nel e, polo argumento anterior, son xeradores.

Problema 4.10. No espazo \mathbb{E}^3 , consideramos a cuádrica que, na referencia ordinaria, ten ecuación

$$\mathcal{Q}: 5x^2 + 5y^2 - 6xy + 2z^2 + 10x - 6y - 3 = 0.$$

- Clasificar metricamente a cuádrica \mathcal{Q} e dar a súa ecuación reducida.
- Sexa $\pi: z = 0$. Clasificar metricamente a cónica $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \pi$. Dar o seu centro, eixes, vértices e focos. Cal é a súa excentricidade?
- Sexa $\mathcal{C}': x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$. Dar as ecuacións dunha afinidade bixectiva $g: \pi \rightarrow \pi$ de xeito que $g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Como se poderían atopar infinitas afinidades bixectivas cumprindo que a imaxe de \mathcal{C} é \mathcal{C}' (non cómpre facer os cálculos)?

Solución. (a) A matriz da cuádrica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 5 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

A cuádrica ten un único centro, que é o punto $\mathcal{O} = (-1, 0, 0)$. Os valores propios da matriz correspondente á parte cuadrática son 2 (dobre) e 8. O valor no centro é -8 , polo que a ecuación reducida é

$$2\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 + 8\tilde{z}^2 = 8,$$

que se corresponde cun elipsoide. A referencia reducida é $\{v_1, v_2, v_3; \mathcal{O}\}$, onde $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ e $v_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

(b) A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -3 \\ \hline 5 & -3 & -3 \end{array} \right).$$

O centro é o $P = (-1, 0)$, e o valor no centro é -8 . Os valores propios da parte cuadrática son 8 e 2, e os vectores propios unitarios correspondentes son $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, respectivamente. Polo tanto, a ecuación reducida na referencia $\{v_1, v_2; P\}$ é

$$\frac{\tilde{x}^2}{4} + \tilde{y}^2 = 1$$

polo que se ten $a = 2$, $b = 1$ e $c = \sqrt{3}$. Os eixes son as rectas $P + \langle v_1 \rangle$ e $P + \langle v_2 \rangle$. Os vértices son $P \pm av_1$ e $P \pm bv_2$, polo que son $v_1 = (-1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $v_2 = (-1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $v_3 = (-1 + 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $v_4 = (-1 - 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Os focos son $P \pm cv_1$, polo que son $F_1 = (-1 + \sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2)$ e $F_2 = (-1 - \sqrt{6}/2, -\sqrt{6}/2)$.

Finalmente, temos que a excentricidade é $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) A cónica \mathcal{C}' pode escribirse como

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8,$$

polo que se trata dunha circunferencia de centro $(2, 2)$ e radio $2\sqrt{2}$. Polo tanto, construímos unha afinidade g do seguinte xeito.

- O centro da elipse vai ao centro da circunferencia, é dicir, $g(-1, 0) = (2, 2)$.
- O eixe v_1 da elipse vai a un eixe calquera da circunferencia; como a lonxitude do semieixe maior da elipse era $a = 2$ e agora o radio é $2\sqrt{2}$, temos que $\tilde{g}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 0)$.
- O eixe v_2 da elipse vai a un eixe da circunferencia perpendicular ao anterior; como a lonxitude do semieixe menor da elipse era $b = 1$, temos que $\tilde{g}(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = (0, 2\sqrt{2})$.

Polo tanto, $\tilde{g}(1, 0) = (1, 2)$ e $\tilde{g}(0, 1) = (1, -2)$. Entón, $g(0, 0) = (2, 2) + \tilde{g}(1, 0) = (3, 4)$, e a matriz correspondente ao movemento é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Para obter infinitas afinidades bixectivas, podemos considerar a composición da afinidade anterior con calquera xiro ou simetría que fixe a circunferencia. Por exemplo, podemos considerar calquera rotación de centro $(2, 2)$.

Problema 4.11. Consideramos a cuádrlica $Q: 4(x - 2) - y^2 - z^2 - 2xz + 4z = 0$ e a cónica $C_1: 4(x - 2) - y^2 = 0$ obtida ao intersecar Q co plano $z = 0$. Sexa C_2 a parábola con vértice $p_2 = (0, 2)$ e foco $F_2 = (\sqrt{2}/2, 2 + \sqrt{2}/2)$.

(a) Clasificar metricamente a cuádrlica Q e atopar a súa forma reducida.

- (b) Clasificar a cónica C_1 e atopar os seus elementos característicos (foco, vértice e directriz). Cal é a súa excentricidade?
- (c) Atopar un movemento f de xeito que $f(C_1) = C_2$. Cantos movementos haberá que cumpran esa condición?
- (d) Atopar a ecuación da parábola C_2 .

Solución. (a) A matriz da cuádrlica é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 & -8 \end{array} \right).$$

O centro da cónica é o punto $p = (0, 0, 2)$, e o seu valor no centro é -4 . Os valores propios da parte cuadrática son $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, -1 e $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, polo que a forma reducida é

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x^2 - y^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}z^2 = 4.$$

Temos polo tanto un hiperboloide de dúas follas.

- (b) A matriz da cónica é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -8 \end{array} \right).$$

Unha base vectorial adaptada á parte cuadrática é $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (0, 1)$. É inmediato ver que non ten centro, polo que se trata dunha parábola. O vértice da parábola é o $(2, 0)$. O foco é o $(3, 0) = (2, 0) + u_1$ e a directriz é a recta $x = 1$. Por tratarse dunha parábola, a súa excentricidade é $e = 1$.

- (c) A distancia do foco ao vértice é 1, ao igual que no caso de C_1 ; polo tanto, a ecuación reducida é $\tilde{x}^2 - 4\tilde{y} = 0$. Esa ecuación é nunha referencia da forma $\{v_1, v_2; p\}$, onde $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $p = (0, 2)$. Polo tanto, podemos transformar C_2 en C_1 considerando un movemento f dado por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Unicamente hai dous movementos que transformen unha parábola noutra: un deles directo, que é o que acabamos de dar; e o outro inverso, que é a composición do anterior coa simetría da parábola con respecto ao eixe.

- (d) A partir da ecuación do movemento tense que

$$x = \frac{x' + y' - 2 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{y' - x' - 2}{\sqrt{2}}.$$

Substituíndo na ecuación de C_1 , temos que a ecuación de C_2 é

$$x^2 + y^2 - 2xy + (4 - 4\sqrt{2})x + (-4 - 4\sqrt{2})y + 4 + 8\sqrt{2} = 0.$$

Alternativamente, pódese achar a expresión do xeito habitual partindo da ecuación nunha base reducida e facendo o cambio de base habitual.

Cónicas e cuádricas proxectivas

Problema 4.12. Determinar as ecuacións das cónicas que cumpren o seguinte:

- (a) Pasan polos puntos $[1 : 0 : -1]$, $[1 : 0 : 4]$, $[1 : 2 : 1]$, $[1 : 2 : -1]$ e $[1 : 3 : 0]$.
- (b) Pasan polos puntos $[1 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 0]$ e $[1 : 1 : 1]$ e son tanxente á recta $x + y + z = 0$ no punto $[-1 : 0 : 1]$.
- (c) Pasan polos puntos $[1 : 0 : 1]$, $[1 : 2 : 1]$ e $[1 : 1 : 2]$ e son tanxentes á cónica $x^2 + y^2 - 4z^2 - 2xy + 3xz = 0$ no punto $[1 : 1 : 0]$.

Solución. (a) Pomos $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$. Entón, as condicións do problema escríbense como

$$\begin{aligned} a + c - e &= 0 \\ a + 16c + 4e &= 0 \\ a + 4b + c + 2d + e + 2f &= 0 \\ a + 4b + c + 2d - e - 2f &= 0 \\ a + 9b + 3d &= 0. \end{aligned}$$

Obtense así un sistema compatible indeterminado de cinco ecuacións con seis incógnitas. Normalizando de xeito que $a = 1$, temos que

$$q(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{24} - \frac{z^2}{4} - \frac{11xy}{24} + \frac{3xz}{4} - \frac{3yz}{8}.$$

- (b) Temos catro puntos da cónica, os tres que se indican inicialmente e o $[-1 : 0 : 1]$. Para determinar a cónica necesitamos unha quinta ecuación, que vén de impoñer que $x + y + z$ sexa tanxente no punto $[-1 : 0 : 1]$. Esa condición é equivalente a dicir que o punto $[-1 : 0 : 1]$ é conxugado a calquera outro da recta, por exemplo, o $[1 : -1 : 0]$. Entón, a ecuación obtense facendo

$$(1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -a + \frac{e}{2} + \frac{d}{2} - \frac{f}{2} = 0.$$

As outras catro ecuacións son

$$\begin{aligned} a + c + e &= 0 \\ a + b + d &= 0 \\ a + b + c + d + e + f &= 0 \\ a + c - e &= 0 \end{aligned}$$

Polo tanto, quédanos que

$$q(x, y, z) = x^2 - 4y^2 - z^2 + 3xy + yz.$$

- (c) A tanxente á cónica $x^2 + y^2 - 4z^2 - 2xy + 3xz = 0$ no punto $[1 : 1 : 0]$ é

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}z = 0.$$

Polo tanto, queremos que a tanxente á cónica no punto $[1 : 1 : 0]$ sexa a recta $z = 0$, o que quere dicir, como antes, que o punto é conxugado de calquera que se atope sobre a recta, por exemplo, o $[1 : 0 : 0]$:

$$(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a + \frac{d}{2} = 0.$$

As outras catro ecuacións son

$$\begin{aligned} a + c + e &= 0 \\ a + 4b + c + 2d + e + 2f &= 0 \\ a + b + 4c + d + 2e + 2f &= 0 \\ a + b + d &= 0. \end{aligned}$$

A cónica buscada é

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz.$$

Problema 4.13. Consideramos a cuádrlica do espazo proxectivo real

$$\mathcal{C}: x^2 - 2xy + 2xz + 2y^2 - 4yz + 2yt - 4zt - 4t^2 = 0$$

e un plano Π que pasa polo punto $[4 : 3 : 2 : -1]$.

- Clasificar a cuádrlica \mathcal{C} .
- Clasificar a cuádrlica afín que se obtén ao tomar Π como plano do infinito.

Solución. (a) A matriz da cuádrlica é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o método de congruencia-pivote, temos que unha forma reducida é $x^2 + y^2 - 2z^2 - \frac{9}{2}t^2$, polo que $(r, i) = (4, 2)$.

- Consideramos o plano $z + 2t = 0$. A cónica correspondente á restrición a ese plano é $x^2 + 2y^2 + 4t^2 - 2xy - 4xt + 10yt = 0$, que ten por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nese caso, $(r_\infty, i_\infty) = (3, 1)$, polo que a cuádrlica é un hiperboloide dunha folla.

A única opción de non ser un hiperboloide dunha folla sería que fose un paraboloide hiperbólico, en cuxo caso $(r_\infty, i_\infty) = (2, 1)$; é dicir, a restrición ao hiperplano do infinito consiste en dúas rectas que se cruzan nun punto. Como o punto $[4 : 3 : 2 : -1] \in \mathcal{C}$, habería que atopar dúas rectas que pasasen por el e que estivesen contidas na cuádrlica; nese caso, colleríamos ese plano, que sería o

hiperplano tanxente no punto. A ecuación do hiperplano tanxente é $x - y + t = 0$, polo que imos analizar a restrición a ese plano. A cónica que se obtén é

$$-3x^2 + 4xy + 6xz - 8yz = 0,$$

para a cal $(r_\infty, i_\infty) = (2, 1)$. É dicir, neste caso é un paraboloides hiperbólico e en calquera outro caso é un hiperboloides dunha folla.

Problema 4.14. Consideramos a cónica C de $\mathbb{P}_\mathbb{R}^2$ de ecuación

$$x^2 + y^2 - 2yz = 0$$

e o punto $P = [2 : -1 : -1]$.

- Calcular a recta r , polar de P respecto de C , e os puntos de intersección A e B da polar con C .
- Sexa $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ unha homoloxía xeral con eixe r e tal que P tamén é un punto fixo. Sabendo que $f(0, 0, 1) \in C$, atopar a cónica $C' = f(C)$.
- Sexa s a polar de P respecto de C' e $\mathbb{A} = \mathbb{P}^2 \setminus s$. Clasificar a cónica afín $C' \cap \mathbb{A}$.
- Consideramos $\mathbb{P}_\mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, z, t) tal que o plano dos apartados anteriores sexa $\pi: t = 0$. Atopar a ecuación dunha cuádrica Q non dexenerada, regrada, tanxente ao plano $x = 0$ e tal que $Q|_\pi = C$.

Solución. (a) A polar é a recta $2x + z = 0$. Para atopar os puntos de intersección con C , impomos que $z = -2x$, de xeito que nos queda $x^2 + y^2 + 4xy = 0$. Se $x = 0$, entón $x = y = z = 0$, polo que podemos supor que $x = 1$; nese caso, $y^2 + 4y + 1$, polo que os puntos de corte son

$$A = [1 : -2 + \sqrt{3} : -2], \quad B = [1 : -2 - \sqrt{3} : -2].$$

- Consideramos os puntos $M = [0 : 1 : 0]$ e $N = [-1 : 0 : 2]$, que pertencen á recta r . Consideramos entón unha base $\{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$ e $v_3 = (2, -1, -1)$, de xeito que $[v_1] = M$, $[v_2] = N$ e $[v_3] = P$. Sabemos entón que, se $f = [\varphi]$, podemos escribir $\varphi(v_1) = v_1$, $\varphi(v_2) = v_2$ e $\varphi(v_3) = av_3$. É dicir,

$$\varphi(0, 1, 0) = (0, 1, 0), \quad \varphi(-1, 0, 2) = (-1, 0, 2), \quad \varphi(2, -1, -1) = (2a, -a, -a).$$

Temos que $(0, 0, 1) = 1/3v_1 + 2/3v_2 + 1/3v_3$. Polo tanto,

$$\varphi(0, 0, 1) = (-2/3 + 2a/3, 1/3 - a/3, 4/3 - a/3).$$

Impondo que o punto cumpre que $x^2 + y^2 - 2yz = 0$, temos que $a = \pm 1$. Se $a = 1$, entón f é a identidade; en caso contrario, podemos interpretar a aplicación lineal φ como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & 0 & -4/3 \\ 4/3 & 1 & 2/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A aplicación lineal é unha involución xa que os valores propios son ± 1 , polo que a súa inversa coincide con ela mesma, e iso permite escribir de xeito inmediato (x, y, z) en termos de (x', y', z') . Polo tanto, temos

$$\left(-\frac{5}{3}x' - \frac{4}{3}z'\right)^2 + \left(\frac{4}{3}x' + y' + \frac{2}{3}z'\right)^2 - 2\left(\frac{4}{3}x' + y' + \frac{2}{3}z'\right)\left(\frac{4}{3}x' + \frac{5}{3}z'\right),$$

que, simplificando, resulta

$$(x')^2 + (y')^2 - 2y'z'.$$

É dicir, $f(C) = C$.

- (c) Como $C' = C$, a recta s coincide con r . Temos que para a cónica C , $(r, i) = (3, 1)$. O resultado de restrinxir a $z = -2x$ deixa a cuádrica $x^2 + y^2 + 4xy = 0$, en cuxo caso se ten $(r_\infty, i_\infty) = (2, 0)$, polo que se trata dunha elipse.
- (d) Pomos

$$Q: x^2 + y^2 - 2yz + 2axt + 2byz + 2czt + d^2,$$

de xeito que se cumpre que $Q|_\pi = C$. A condición de ser tanxente ao plano $x = 0$ cúmprese se a restrición ten rango 2 e índice 1, é dicir, é a unión de dúas rectas que se cortan no punto de tanxencia. Por exemplo, podemos pór $b = c = d = 0$; se $a = 1$, teremos que $(r, i) = (4, 2)$, polo que Q é non dexenerada e regrada. É dicir, a cuádrica

$$x^2 + y^2 - 2yz + 2xt = 0$$

cumpre tódalas condicións; en concreto, o punto $[0 : 0 : 0 : 1] \in Q$ é o plano tanxente nese punto é $x = 0$.

Problema 4.15. Consideramos a cónica C de $\mathbb{P}_\mathbb{R}^2$ de ecuación

$$xy + yz + zx = 0.$$

- (a) Clasificar C e atopar unha referencia proxectiva adaptada á súa forma reducida.
- (b) Sexa $p_1 = [1 : 0 : 0] \in C$. Atopar un punto $p_2 \in C$ tal que $T_{p_1}(C) \cap T_{p_2}(C) \in r$, onde r é a recta dada por $x + y - 5z = 0$.
- (c) Dar unha recta L tal que a cónica afín $C \cap (\mathbb{P}_\mathbb{R}^2 \setminus L)$ sexa unha hipérbole de centro $p_2 = [6 : -1 : 1]$. Atopar as súas asíntotas.
- (d) En $\mathbb{P}_\mathbb{R}^3$, con coordenadas $[x : y : z : t]$, consideramos o plano $W : t = 0$ e consideramos a cónica C anterior como cónica en W de xeito natural. Atopar a ecuación da cuádrica Q de $\mathbb{P}_\mathbb{R}^3$ tal que $Q \cap W = C$; Q contén as rectas $L_1 : y = z = 0$ e $L_2 : x = y = z$; e Q contén o punto $p_4 = [1 : 1 : 1 : 1]$.
- (e) Clasificar a cuádrica proxectiva Q e a cuádrica afín $Q \cap (\mathbb{P}_\mathbb{R}^3 \setminus W)$.

Solución. (a) Como a cónica está ben definida salvo multiplicación por escalar, podemos traballar con $2xy + 2yz + 2zx = 0$. Sexa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando congruencia pivote, temos que a forma reducida é

$$2\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 - 2\bar{z}^2 = 0,$$

nunha referencia $\mathcal{R} = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$. Temos que $(r, i) = (3, 1)$, polo que se trata da cónica non dexenerada real.

(b) En primeiro lugar, temos que $T_{p_1}(\mathcal{C})$ pode calcularse como

$$(1 \ 0 \ 0) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0;$$

isto é, $T_{p_1}(\mathcal{C}) : y + z = 0$. Polo tanto, $T_{p_1}(\mathcal{C}) \cap r = \{[6 : -1 : 1]\}$. Impomos agora que a tanxente por p_2 pase polo punto $[6 : -1 : 1]$, isto é,

$$(6 \ -1 \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7y + 5z = 0.$$

Impondo ao mesmo tempo que $xy + yz + zx = 0$, quédanos que as opcións son, por unha banda, $p_1 = [1 : 0 : 0]$ e, pola outra, $p_2 = [35 : -10 : 14]$.

(c) O centro é a pola da recta do infinito. Polo tanto, os cálculos do apartado anterior amosan que $L : 7y + 5z = 0$. Esta recta corta a \mathcal{C} en dous puntos: $\mathcal{C} \cap L = \{p_1, p_2\}$. As asíntotas son as tanxentes aos puntos do infinito de \mathcal{C} , polo que se corresponden con

$$y + z = 0, \quad 4x + 49y + 25z = 0.$$

(d) Pomos $Q : 2xy + 2yz + 2zx + 2axt + 2byt + 2czt + d^2 = 0$, de xeito que a matriz é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Para impoñer que unha recta estea contida nunha cuádrida chega con ver que hai polo menos tres puntos de intersección. As rectas L_1 e L_2 xa teñen en común coa cuádrida os puntos $[1 : 0 : 0 : 0]$ e $[0 : 0 : 1 : 0]$, respectivamente. Collemos agora o punto $[0 : 0 : 0 : 1]$ na intersección, $[1 : 0 : 0 : 1]$ en L_1 e $[0 : 0 : 1 : 1]$ en L_2 . Temos entón 4 puntos, e cada un deles dános un valor dos parámetros, de xeito que $a = c = d = 0$ e $b = -3$. Polo tanto,

$$Q : xy + yz + zx - 3yt = 0.$$

(e) Aplicando congruencia pivote, temos que $(r, i) = (4, 2)$, polo que é a cuádrida non dexenerada regrada. A restricción a W dános $(r_\infty, i_\infty) = (3, 1)$, polo que se trata dun hiperboloide dunha folla.

Problema 4.16. Consideramos a cónica $Q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dada pola ecuación

$$x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 = 0$$

e o punto $p = [0 : 0 : 1]$.

(a) Clasificar Q e atopar unha referencia reducida.

(b) Para toda recta L pasando por p , sexa $C_L = Q \cap (\mathbb{P}^2 \setminus L)$. Determinar que tipo de cónica afín é e demostrar que ten centro (ao que chamaremos p_L).

- (c) Sexa $M: x_2 - x_3 = 0$. Demostrar que, para todo L como antes, a recta afín $M_0 = M \cap (\mathbb{P}^2 \setminus L)$ é un eixe de simetría da cónica afín no sentido seguinte: toda recta afín N_0 na dirección de p corta en dous puntos a C_L dos cales o seu punto medio é $N_0 \cap M_0$.

Solución. (a) Aplicando congruencia pivote, vemos que a forma reducida é

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = 0,$$

a cónica non dexenerada real. Podemos tomar como base adaptada $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1/\sqrt{2}, 0)$ e $u_3 = (0, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$, de xeito que a referencia na que temos a ecuación adaptada é $\mathcal{R} = \{[u_1], [u_2], [u_3]; [u_1 + u_2 + u_3]\}$.

- (b) O tipo de cónica afín depende do número de puntos en $L \cap Q$. Como $p = [0 : 0 : 1] \in L$, podemos pór $L: ax_1 + bx_2 = 0$, onde $(a, b) \neq (0, 0)$. Isto é equivalente a dicir que $L = [F]$, onde $F = \langle (0, 0, 1), (b, -a, 0) \rangle$. Nese caso,

$$L \cap Q = Q|L: -x^2 + (b^2 + 2a^2)y^2 - 2axy.$$

Como o determinante é $-a^2(b^2 - 3a^2) < 0$, temos que consta de 2 puntos diferentes. Polo tanto, $C_L = Q \cap (\mathbb{P}^2 \setminus L)$ é sempre unha hipérbola e, en concreto, ten centro.

- (c) Sexa N_0 unha recta afín en $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L$ con dirección p . Isto quere dicir que a recta proxectiva \bar{N}_0 contén o punto proxectivo p . Polo tanto, corta $Q = \bar{C}_L$ en dous puntos diferentes, q_1 e q_2 . Sexa $q_3 = N_0 \cap M_0 \in M$, de xeito que $q_3 \in M = H_p(Q)$, polo que p e q_3 son puntos polares. Como a recta que determinan, \bar{N}_0 , corta Q en dous puntos diferentes q_1 e q_2 , sabemos que $(q_1, q_2; q_3, p) = -1$. Chamando q_1, q_2 e q_3 aos puntos afíns correspondentes, como p está na recta do infinito, temos que $(q_1, q_2, q_3) = -1$, polo que $q_3 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$, con $\{q_1, q_2\} \in N_0 \cap C_L$.

Problema 4.17. Calcular os puntos de intersección das cónicas

$$2x^2 + 5y^2 - 7xy + 2yz - 2z^2 = 0, \quad x^2 + 3y^2 - 4xy + yz - z^2 = 0.$$

Solución. Restando o dobre da segunda ecuación á primeira temos que $-y^2 + xy = y(-y + x) = 0$, polo que ou $y = 0$ ou $x - y = 0$. Se $y = 0$, substituindo na primeira ecuación, obtemos que $2(x^2 - z^2) = 2(x - z)(x + z) = 0$, polo que as solucións que se obteñen son $[1 : 0 : 1]$ e $[1 : 0 : -1]$. Se $x = y$, obtemos que $z(y - z) = 0$, e as solucións son neste caso $[1 : 1 : 0]$ e $[1 : 1 : 1]$.

Problema 4.18. Consideramos as cónicas C, C' de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de ecuacións

$$4x_1x_2 - x_3^2 - 4x_2^2 = 0, \quad x_1x_2 + x_3^2 + 4x_2^2 - 5x_2x_3 = 0,$$

e denotamos por $C_{\lambda, \mu}$ a cónica do feixe xerada por C e C' , de parámetros $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Denotamos por \mathcal{F} o conxunto de cónicas do feixe.

- (a) Determinar as cónicas dexeneradas do feixe \mathcal{F} e clasificalas.
- (b) Determinar $C \cap C'$.
- (c) Sexa f unha homografía de \mathbb{P}^2 . Demostrar que se D é unha cónica dexenerada, entón $f(D)$ é unha cónica dexenerada equivalente a D . Concluir que se f cumpre que $f(C_{\lambda, \mu}) \in \mathcal{F}$ para todo $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$, entón as cónicas dexeneradas do feixe \mathcal{F} son invariantes por f .

- (d) Determinar as homografías que cumpren as condicións do apartado anterior e que, ademais, cumpren que $f([1 : 1 : 0]) = [1 : 1 : 0]$.

Solución. (a) A matriz da cónica $C_{\lambda,\mu}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda + \mu/2 & 0 \\ 2\lambda + \mu/2 & -4\lambda + 4\mu & -5\mu/2 \\ 0 & -5\mu/2 & -\lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

A cónica é dexenerada se, e soamente se, o determinante é 0. O determinante pode escribirse como $(2\lambda + \mu/2)^2(\mu - \lambda)$, polo que hai dúas opcións:

- Se $\lambda = \mu$, temos $x_2(x_1 - x_3)$, que se corresponde con dúas rectas que se cortan no punto $[1 : 0 : 1]$.
 - Se $4\lambda + \mu = 0$, temos $(2x_2 - x_3)^2 = 0$, que é unha recta dobre.
- (b) Podemos calcular a intersección das dúas cónicas dexeneradas, que estarán entón en calquera cónica do feixe; temos entón que $C \cap C' = \{[1 : 0 : 0], [2 : 1 : 2]\}$.
- (c) Se a matriz da cónica é A e a matriz da proxectividade é S , entón a matriz de $f(C)$ é $(S^{-1})^t A S^{-1}$, polo que as formas cuadráticas teñen os mesmos invariantes. En particular, se D é dexenerada, $f(D)$ tamén o é. Supoñamos que $f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Entón, $f(C_{1,1})$ e $f(C_{1,-4})$ son dexeneradas e son do feixe. Isto quere dicir que cada unha é invariante ou que se intercambian entre elas. Pero como $C_{1,1}$ e $C_{1,-4}$ non son equivalentes, a segunda posibilidade queda descartada.
- (d) Polo apartado anterior temos que f deixa invariante a recta $2x_1 - x_2 = 0$, porque $C_{1,-4}$ é invariante; e tamén deixa invariante o par de rectas $x_1(x_0 - x_2)$, porque $C_{1,1}$ é invariante. Neste caso, pode suceder que cada unha das rectas sexa invariante ou que f as intercambie. Imos analizar os posibles puntos fixos de f .
- Temos que $P_1 = [1 : 1 : 0]$ é fixo por hipótese.
 - O punto $P_2 = [1 : 0 : 1]$ é a intersección das dúas rectas de $C_{1,1}$, e en calquera caso é fixo.
 - Se f deixa invariante as dúas rectas de $C_{1,1}$, entón os puntos $P_3 = [1 : 0 : 0]$ e $P_4 = [2 : 1 : 2]$ son fixos, xa que son as intersección das rectas invariantes. Se f intercambia as rectas, entón os puntos fixos son $f(P_2) = P_3$ e $f(P_3) = P_2$.

Os puntos P_i son puntos en posición xeral e, polo tanto, definen unha referencia proxectiva de \mathbb{P}^2 , de xeito que f queda univocamente determinada polos valores neses puntos. Nun caso obtemos a identidade; no outro, é a matriz que na referencia $\mathcal{R} = \{P_2, P_3, P_4; P_1\}$ ten por matriz nesa referencia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na referencia ordinaria, obtense

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicacións á xeometría clásica

Problema 4.19. Probar que o triángulo diagonal dun cuadrilátero inscrito nunha cónica non dexenerada é autopolar.

Solución. Sexan A, B, C e D os vértices do cuadrilátero, e consideramos a referencia proxectiva $\{A, B, C; D\}$. Temos que $P := AB \cap CD = [1 : 1 : 0]$, $Q := AC \cap BD = [1 : 0 : 1]$ e $R := AD \cap BC = [0 : 1 : 1]$. A cónica que pasa polos catro puntos da referencia é

$$q(x, y, z) = dxy + eyz + fxz, \quad \text{con} \quad d + e + f = 0.$$

Tense que $d, e, f \neq 0$, xa que en caso contrario a cónica sería dexenerada. A recta que pasa por Q e R ten por ecuación $x + y - z = 0$; a polar do punto P é

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & d/2 & e/2 \\ d/2 & 0 & f/2 \\ e/2 & f/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{2}(x + y - z) = 0.$$

A ecuación da polar é polo tanto $x + y - z = 0$, que coincide coa recta $Q \vee R$. O resultado para os outros dous puntos é totalmente análogo.

Problema 4.20. Sexa $ABCD$ un cuadrilátero inscrito nunha cónica non dexenerada, e sexan a, b, c e d as rectas tanxentes nos vértices A, B, C e D . Demostrar que as rectas $AC, BD, (a \cap b) \vee (c \cap d)$ e $(a \cap d) \vee (b \cap c)$ concorren.

Solución. Sexan A, B, C e D os vértices do cuadrilátero, e consideramos a referencia proxectiva $\{A, B, C; D\}$. Temos que $P := AB \cap CD = [1 : 1 : 0]$, $Q := AC \cap BD = [1 : 0 : 1]$ e $R := AD \cap BC = [0 : 1 : 1]$. A cónica que pasa polos catro puntos da referencia é

$$q(x, y, z) = dxy + eyz + fxz, \quad \text{con} \quad d + e + f = 0.$$

Tense que $d, e, f \neq 0$, xa que en caso contrario a cónica sería dexenerada. Un cálculo rutineiro amosa que as tanxentes nos vértices son as rectas de ecuacións

$$\begin{aligned} dy + ez &= 0 \\ dx + fz &= 0 \\ ex + fy &= 0 \\ fx + ey + dz &= 0. \end{aligned}$$

Polo tanto, os vértice son $V_1 := a \cap b = [f : e : -d]$, $V_2 := b \cap c = [-f : e : d]$, $V_3 := c \cap d = [f : -e : f - e]$ e $V_4 := d \cap a = [d - e : -e : d]$. Polo tanto, a recta $V_1 \vee V_2$ é $dx + fz = 0$ e a recta $V_3 \vee V_4$ é $fx + ey + dz = 0$. Entón, o punto de intersección é $[f : f - d : -d]$. Analogamente, tense que

$$\begin{aligned} X &:= V_1 V_2 \cap V_3 V_4 = [f : f - d : -d], \\ Y &:= V_1 V_3 \cap V_2 V_4 = [1 : 0 : 1], \\ Z &:= V_1 V_4 \cap V_2 V_3 = [f : -e : d], \end{aligned}$$

polo que o punto de corte de $V_1 V_3$ e $V_2 V_4$ é o $[1 : 0 : 1]$, que tamén é o punto de corte de AC e BD . Por conseguinte, o punto é común ás catro rectas.

Problema 4.21. Sexan A, B, C e D catro puntos sobre unha cónica non singular e sexan a, b, c e d as catro tanxentes nestes puntos. Sexan $V_1 = a \cap b$, $V_2 = b \cap c$, $V_3 = c \cap d$ e $V_4 = d \cap a$.

- (a) Demostrar que os puntos $c \cap d$, $a \cap b$, $AD \cap BC$ e $BD \cap AC$ están aliñados.
- (b) Demostrar que os puntos $(V_1 \vee V_2) \cap (V_3 \vee V_4)$, $(V_1 \vee V_4) \cap (V_2 \cap V_3)$, $AB \cap CD$ e $AD \cap BC$ están aliñados.

Solución. Para este exercicio, imos empregar os cálculos do problema anterior. Como antes, sexan A , B , C e D os vértices do cuadrilátero, e consideramos a referencia proectiva $\{A, B, C; D\}$. Temos que $P := AB \cap CD = [1 : 1 : 0]$, $Q := AC \cap BD = [1 : 0 : 1]$ e $R := AD \cap BC = [0 : 1 : 1]$. A cónica que pasa polos catro puntos da referencia é

$$q(x, y, z) = dxy + eyz + fxz, \quad \text{con} \quad d + e + f = 0.$$

Tense que $d, e, f \neq 0$, xa que en caso contrario a cónica sería dexenerada.

- (a) Coas notacións do exercicio anterior, $R = AD \cap BC$ e $Q = AC \cap BD$. A recta que pasa por eses dous puntos é a $x + y - z = 0$. Esa recta tamén pasa por $V_3 = c \cap d$ e por $V_1 = a \cap b$, polo que os puntos están aliñados.
- (b) Do mesmo xeito a ecuación da recta $X \vee Z$ é $x - y + z = 0$, que contén os puntos P e R . Polo tanto, os catro puntos están aliñados.

Problema 4.22. Sexa $ABCD$ un paralelogramo inscrito nunha elipse. Demostrar que o punto de intersección das diagonais é o centro da elipse.

Solución. Como $ABCD$ é un paralelogramo, os puntos $P = AB \cap CD$ e $R = AD \cap BC$ están na recta do infinito, polo que PR é a recta do infinito. Polo tanto, o punto $Q = AC \cap BD$ é o polo da recta do infinito, é dicir, o centro da elipse.

Problema 4.23. Sexa ABC un triángulo no plano euclidiano \mathbb{E}^2 . Sexa P un punto na recta BC no exterior do lado BC . Trázase unha recta ℓ que pasa por P e que é diferente de BC . A recta ℓ corta o lado AB nun punto M e o lado AC nun punto N . As rectas CM e BN córtanse nun punto R . Sexa Q o punto de corte de AR e BC .

- (a) Demostrar que o punto Q non depende da elección da recta ℓ .
- (b) Supoñamos que $|AB| \neq |AC|$. Demostrar que o lugar xeométrico Γ dos puntos $X \in \mathbb{E}^2$ de xeito que

$$\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

é unha cónica e clasifícala.

- (c) Determinar para que punto A do lado BC se cumpre que $Q \in \Gamma$. Xustificar a partir de que punto P se podería obter o punto Q e empregar isto para dar unha descrición completa da cónica (centro e eixes). Que sucedería se $|AB| = |AC|$?

Solución. (a) Comezamos aplicando o teorema de Menelao no triángulo ABC coa recta que pasa por P , M e N . Entón,

$$(P, B, C)(N, C, A)(M, A, B) = -1.$$

Aplicando agora o teorema de Ceva no mesmo triángulo coas rectas AQ , BN e CM tense que

$$(Q, B, C)(N, C, A)(M, A, B) = 1,$$

polo que

$$(Q, B, C) = -(P, B, C),$$

o que quere dicir que Q está ben definido independentemente da elección da recta.

- (b) Consideramos un sistema de coordenadas no que $B = (0, 0)$ e $C = (a, 0)$; por simplicidade, pomos $a = 1$, xa que senón é suficiente multiplicar tódalas coordenadas por a . Sexa $k = \frac{|AB|}{|AC|}$. Polo tanto, a condición de que un punto P pertenza a Γ exprésase como

$$(x - 1)^2 + y^2 = k^2(x^2 + y^2),$$

que é a cónica

$$(k^2 - 1)x^2 + (k^2 - 1)y^2 + 2x - 1 = 0.$$

Observamos que, polas condicións do enunciado, tense que $k \neq 1$. A ecuación pode reescribirse como

$$\left(x - \frac{1}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{1 - k^2}\right)^2,$$

que se corresponde cunha circunferencia de centro $\left(\frac{1}{1 - k^2}, 0\right)$ e radio $\left|\frac{k}{1 - k^2}\right|$.

- (c) Sexa Q o punto de corte da bisectriz exterior coa prolongación de BC e P o punto de corte da bisectriz interior co lado BC . Polo teorema da bisectriz interior, sabemos que se cumpre que $\frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PC}$. Nese caso, a igualdade de razóns simples do primeiro apartado amosa que Q tamén cumpre a mesma igualdade de razóns. Polo tanto, Γ é a circunferencia que pasa por A , P e Q . Como $\angle PAQ = \pi/2$, temos que Γ é a circunferencia de diámetro PQ , que, en particular, pasa polo punto A . Cando $|AB| = |AC|$, o lugar xeométrico buscado é a mediatriz do segmento BC . Nese caso, Q é o punto medio e P sería o punto do infinito da recta BC .

Bibliografía

- [BS24] S. BALL; O. SERRA, *A Course in Combinatorics and Graphs*. Compact Texts in Mathematics, Springer Verlag, 2024
- [CL00] M. CASTELLET; I. LLERENA, *Àlgebra lineal i geometria*. Manuals Matemàtiques **1**, Universitat Autònoma de Barcelona, 2000.
- [FG17] J.F. FERNANDO; J.M. GAMBOA, *Geometría Lineal: Espacios Afines y Projectivos*. Sanz y Torres, S.L., 2017.
- [GW77] K.W. GRUENBERG; A.J. WEIR, *Linear Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1977.
- [GW77] K.W. GRUENBERG; A.J. WEIR, *Linear Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1977.
- [H98] E. HERNÁNDEZ, *Álgebra y geometría*. Addison–Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1998.
- [Pa13] P. PASCUAL, *Geometria Afí i Euclidiana. Apunts de classe*. Apuntaments do curso *Geometria Afí i Euclidiana* impartido na Universitat Politècnica de Catalunya, 2013.
- [Pl14] F. PLANAS, *Àlgebra Multilineal i Geometria. Apunts de classe*. Apuntaments do curso *Àlgebra Multilineal i Geometria* impartido na Universitat Politècnica de Catalunya, 2014. Disponibles en <https://web.mat.upc.edu/francesc.planas/AMG-apunts.pdf>.
- [R08] A. REVENTÓS TARRIDA, *Afinitats, moviments i quàdriques*. Manuals Matemàtiques **50**, Universitat Autònoma de Barcelona, 2008.
- [R01] A. REVENTÓS TARRIDA, *Geometria projectiva*. Materials **85**, Universitat Autònoma de Barcelona, 2001.
- [RG11] J. RITCHER-GEBERT, *Perspectives on Projective Geometry*. Springer Verlag, 2011.